

Zur Begrenzung der radialen Ausdehnung des Lichtbogenstromes durch ein axiales Magnetfeld

II. Skalengesetze und Vergleich mit Experimenten

O. KLÜBER

Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 8046 Garching b. München

(Z. Naturforsch. 27 a, 652—670 [1972]; eingegangen am 21. Dezember 1971)

On Limitation of the Radial Extent of the Arc Current by Means of an Axial Magnetic Field

II. Scaling Laws and Comparison with Experimental Results

In an arc with superimposed axial magnetic field, radial current components cause a rotational motion of the plasma column and produce azimuthal Hall currents and hence electromotive forces such that the arc current is guided by the magnetic field lines. In the first part of this paper the steady-state plasma equations have been solved for a homogeneous plasma in simple geometry, allowance being made for finite viscosity. Here, scaling laws giving the radial extent of the arc current are obtained. In addition, electrodes with finite cross sections are treated. The results of model calculations agree well with experimental data. Generally, the model is applicable, if the angular frequency of the plasma is small compared with the ion gyration frequency.

1. Problemstellung, Bogenmodell und Parameter

Diese Arbeit behandelt in Fortsetzung des ersten Teils¹ die stationäre Stromdichte- und Potentialverteilung eines Lichtbogens unter dem Einfluß eines äußeren axialen Magnetfeldes. Dieser beruht darauf, daß radiale Stromdichtekomponenten das Plasma in Rotation versetzen und azimuthale Hall-Ströme antreiben. So entstehen elektromotorische Kräfte, die der radialen Stromdichte entgegenarbeiten und damit die radiale Ausdehnung des Bogenstromes begrenzen.

Die quantitative Behandlung des Problems erfordert die simultane Lösung der Maxwell'schen Gln. $\text{div } \mathbf{j} = 0$ und $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ sowie der Bewegungsgleichung des Plasmas und des verallgemeinerten Ohm'schen Gesetzes. Dabei ist in der Bewegungsgleichung die innere Reibung des Plasmas zu berücksichtigen. Es läßt sich nämlich leicht zeigen¹, daß die Rotationsgeschwindigkeit in einem reibungsfreien Plasma so lange anwächst, bis sie über die EMK $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ den radialen Stromfluß völlig unterdrückt hat, d.h. der Strom kann dann nur genau parallel zu den Feldlinien des äußeren Magnetfeldes fließen. Eine realistische Betrachtungsweise muß somit die innere Reibung des Plasmas einbeziehen, d.h. von der Navier-Stokes'schen Gleichung ausgehen.

Setzt man im verallgemeinerten Ohm'schen Gesetz

$$\frac{1}{\sigma} \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{en_e} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e$$

(Vacs-System, alle Größen in ihrer üblichen Bedeutung) $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ ein und bildet $\text{div } \mathbf{j}$, so erhält man für das Potential V eine inhomogene Differen-

tialgleichung zweiter Ordnung. Dabei treten außer den Termen, die den oben genannten elektromotorischen Kräften entsprechen, auch noch weitere auf, so z. B. wegen des Druckdiffusionsterms, die letzten Endes alle auf die Inhomogenität des Plasmas zurückgehen. Überdies ist für inhomogenes Plasma die Leitfähigkeit ortsabhängig, so daß die Gleichung nichtlinear wird. Das Problem vereinfacht sich somit ganz wesentlich, wenn man die strombegrenzende Wirkung des Magnetfeldes am Modell eines homogenen Plasmas studiert. Setzt man weiterhin ein rein axiales Magnetfeld voraus, so läßt sich der Hall-Effekt durch die Einführung einer „Leitfähigkeit senkrecht zu \mathbf{B} “ berücksichtigen. Diese ist dann

$$\sigma' = \sigma / (1 + \omega_e^2 \tau_e^2),$$

worin ω_e die Gyrofrequenz und τ_e die reziproke Stoßfrequenz der Elektronen ist. Damit erhält man

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\sigma}{\sigma'} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) B; \quad (\text{I.5})$$

v_φ ist dabei die Rotationsgeschwindigkeit des Plasmas. (Gleichungen, die bereits im ersten Teil der Arbeit auftraten, werden stets mit I und der dortigen Gleichungsnummer bezeichnet.) In gleicher Weise vereinfacht sich für homogenes Plasma die Navier-Stokes-Gleichung. Läßt man außer der Rotation keine Bewegung zu, so ist nur die φ -Komponente von 0 verschieden und lautet (nach Um-

Sonderdruckanforderungen an Dr. O. KLÜBER, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, D-8046 Garching bei München.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

formungen)

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) + \frac{\mu'}{\mu''} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{\sigma' B^2}{\mu''} v_\varphi = - \frac{\sigma' B}{\mu''} \frac{\partial V}{\partial r} \quad (\text{I.8})$$

μ' und μ'' sind dabei die Komponenten des Viskositätstensors, die den Impulsaustausch parallel und senkrecht zu \mathbf{B} beschreiben. Sie hängen von den Eigenschaften der Ionenkomponente ab, insbesondere vom Produkt $\omega_i \tau_i$ aus Gyrofrequenz und reziproker Stoßfrequenz der Ionen.

Die gekoppelten Differentialgleichungen (I.5) und (I.8) werden für ein Plasma gelöst, das in radialer Richtung unendlich ausgedehnt ist und in axialer Richtung durch zwei ebene Wände begrenzt wird, auf denen die Elektroden liegen. Die Randbedingungen sind somit die folgenden: Das Potential ist auf den Elektroden konstant. Die Stromdichte verschwindet in den Begrenzungsebenen außer auf den Elektroden. Die Rotationsgeschwindigkeit verschwindet für $r = 0$, $r \rightarrow \infty$ und auf den Begrenzungsebenen; durch die letzte Randbedingung wird die Reibung des Plasmas an der Wand berücksichtigt.

Das oben beschriebene Modell gestattet somit die exakte Behandlung der für die Begrenzung der radialen Ausdehnung des Bogenstroms relevanten Effekte, ohne sich unzulässig weit von der Realität zu entfernen. Inwieweit es zur quantitativen Beschreibung realer, d.h. inhomogener Plasmen geeignet ist, kann freilich nur durch Vergleich mit experimentellen Resultaten geprüft werden; ein solcher Vergleich wird im letzten Abschnitt durchgeführt. Zuvor soll auf die Ergebnisse des ersten Teils der Arbeit eingegangen und der weitere Gang der Untersuchung dargelegt werden.

In Gl. (I.8) tritt die durch

$$a^2 = \mu'' / \sigma' B^2 \quad (1)$$

definierte charakteristische Länge a auf. Sie ist, wie im ersten Teil der Arbeit gezeigt wurde, ein Maß für den Einfluß der inneren Reibung, d.h. diese beeinträchtigt die Rotation um so weniger, je kleiner a gegen die Abmessungen des Bogens ist. Es liegt deshalb nahe, die reduzierten Koordinaten $\varrho = r/a$ und $\zeta = z/z_0$ einzuführen, wo $2z_0$ der Elektrodenabstand ist. Setzt man ferner $V = V_0 \hat{V}$, $v_\varphi = V_0 \hat{w}/a B$, so gehen die Gln. (I.5) und (I.8) in

$$\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \varrho} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \varrho} + \frac{\hat{w}}{\varrho}, \quad (\text{I.12})$$

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \varrho} - \hat{w} \left(1 + \frac{1}{\varrho^2} \right) + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \zeta^2} = - \frac{\partial \hat{V}}{\partial \varrho} \quad (\text{I.13})$$

mit

$$\beta^2 = (\sigma' / \sigma) (z_0 / a)^2, \quad (\text{I.10})$$

$$\gamma^2 = (\mu'' / \mu') (z_0 / a)^2 \quad (\text{I.11})$$

über. In die Gln. (I.12) und (I.13) gehen also nur noch die zwei Parameter β und γ ein; V_0 ist wegen der Linearität herausgefallen und kann so bestimmt werden, daß der Bogenstrom einen vorgegebenen Wert annimmt.

Im ersten Teil der Arbeit wurden die Gln. (I.12), (I.13) für den Spezialfall punkt- oder kreislinienförmiger, d.h. radial nicht ausgedehnter Elektroden gelöst. Die Diskussion der Resultate für Punktelektroden zeigte, daß der Parameter β in zweifacher Hinsicht das Verhalten der Stromdichte bestimmt: Einmal ist die Stromdichte um so stärker auf die Achse konzentriert, je größer β ist. Zum anderen lieferte β auch ein Maß für die Rolle der Rotation bei der Begrenzung der radialen Ausdehnung des Bogenstromes. Das ergab sich durch den Vergleich mit der von RAEDER und WIRTZ² angegebenen Lösung der Gl. (I.5) für $v_\varphi = 0$, d.h. für einen Bogen, in dem die Begrenzung der radialen Ausdehnung nur durch den Hall-Effekt bewirkt wird. Für $\beta \lesssim 1$ unterschieden sich die Resultate nicht erheblich, für $\beta \gg 1$ war der Bogenstrom wesentlich stärker auf die Achsenumgebung konzentriert als im nicht rotierenden Plasma, d.h. die Rotation ist hier der dominante Effekt. Weiterhin zeigte sich, daß der Parameter γ nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Im nächsten Abschnitt soll gezeigt werden, daß sich diese aus einigen Beispielen abgelesenen Aussagen direkt aus den Lösungen der Gln. (I.12), (I.13) herleiten lassen. Damit lassen sich Skalengesetze für die Verbreiterung der Stromdichteverteilung eines zwischen zwei Punktelektroden brennenden Bogens aufstellen, die sich dann auch auf den Fall nicht punktförmiger Elektroden übertragen lassen. Im darauffolgenden Abschnitt wird ein Näherungsverfahren angegeben, mit dem auch Bögen mit radial ausgedehnten Elektroden behandelt werden können. Das ermöglicht den Vergleich mit experimentell bestimmten Potential- und Stromdichteverteilungen, der im vierten Abschnitt durchgeführt wird.

Für diese Zwecke ist es erforderlich, den Gang des Lösungsverfahrens noch einmal kurz zu skizzieren, und die Lösung so darzustellen, daß Ausgangsgleichungen für die folgenden beiden Abschnitte gewonnen werden. Partikulärlösungen der Gln. (I.12), (I.13) erhält man aus dem Separationsansatz

$$\begin{aligned}\hat{V}(\varrho, \zeta) &= J_0(k\varrho) f(\zeta), \\ \hat{w}(\varrho, \zeta) &= J_1(k\varrho) g(\zeta),\end{aligned}$$

worin $J_0(k\varrho)$ und $J_1(k\varrho)$ die Besselschen Funktionen nullter und erster Ordnung sind. f und g sind durch

$$f(\zeta) = A_1 \frac{\sinh \lambda_1 \zeta}{\sinh \lambda_1} + B_1 \frac{\cosh \lambda_1 \zeta}{\cosh \lambda_1} + A_2 \frac{\sinh \lambda_2 \zeta}{\sinh \lambda_2} + B_2 \frac{\cosh \lambda_2 \zeta}{\cosh \lambda_2}, \quad (2)$$

$$g(\zeta) = C_1 \frac{\sinh \lambda_1 \zeta}{\sinh \lambda_1} + D_1 \frac{\cosh \lambda_1 \zeta}{\cosh \lambda_1} + C_2 \frac{\sinh \lambda_2 \zeta}{\sinh \lambda_2} + D_2 \frac{\cosh \lambda_2 \zeta}{\cosh \lambda_2} \quad (3)$$

gegeben, mit

$$\lambda_1 = \sqrt{p(1 + \sqrt{1 - q/p^2})}, \quad (4)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{p(1 - \sqrt{1 - q/p^2})}, \quad (5)$$

$$p = \frac{1}{2} [\gamma^2 + k^2(\beta^2 + \gamma^2)], \quad (6)$$

$$q = \beta^2 \gamma^2 k^4. \quad (7)$$

Die Koeffizienten A_1, \dots, D_2 werden teils durch die Kopplung der Gln. (I.12), (I.13), teils durch die Randbedingungen bestimmt: Die Rotationsgeschwindigkeit soll für $\varrho = 0$ und $\varrho \rightarrow \infty$ verschwinden; diese Eigenschaft hat $J_1(k\varrho)$. Ferner soll v_φ bzw. \hat{w} in den Begrenzungssebenen $\zeta = -1$ und $\zeta = 1$ verschwinden, und zwar unabhängig von der Elektrodengeometrie. Somit muß $g(\zeta)$ diese Eigenschaft haben, woraus

$$\begin{aligned}f(k, \zeta) &= k\beta^2 C(k) \left(\frac{1}{\lambda_1^2 - k^2\beta^2} \frac{\sinh \lambda_1 \zeta}{\sinh \lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2^2 - k^2\beta^2} \frac{\sinh \lambda_2 \zeta}{\sinh \lambda_2} \right) \\ &\quad + k\beta^2 D(k) \left(\frac{1}{\lambda_1^2 - k^2\beta^2} \frac{\cosh \lambda_1 \zeta}{\cosh \lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2^2 - k^2\beta^2} \frac{\cosh \lambda_2 \zeta}{\cosh \lambda_2} \right),\end{aligned} \quad (8)$$

$$g(k, \zeta) = C(k) \left(\frac{\sinh \lambda_1 \zeta}{\sinh \lambda_1} - \frac{\sinh \lambda_2 \zeta}{\sinh \lambda_2} \right) + D(k) \left(\frac{\cosh \lambda_1 \zeta}{\cosh \lambda_1} - \frac{\cosh \lambda_2 \zeta}{\cosh \lambda_2} \right) \quad (9)$$

folgt. Die allgemeine Lösung

$$\hat{w}(\varrho, \zeta) = \int_0^\infty g(k, \zeta) J_1(k\varrho) k dk$$

erfüllt für beliebige $C(k)$ und $D(k)$ die Randbedingungen für \hat{w} . $C(k)$ und $D(k)$ sind nun so zu bestimmen, daß die allgemeine Lösung

$$\hat{V}(\varrho, \zeta) = \int_0^\infty f(k, \zeta) J_0(k\varrho) k dk$$

die Randbedingungen für \hat{V} erfüllt, nämlich: konstantes Potential auf den Elektroden, Verschwinden der Stromdichte und damit Verschwinden von $\partial \hat{V} / \partial \zeta$ in den Ebenen $\zeta = \pm 1$ außerhalb der Elektroden.

Eine einfache Lösung für dieses gemischte Randwertproblem erhält man für radial nicht ausgedehnte Elektroden, auf denen die Stromdichte somit eine δ -Funktion wird. Dann gilt

$$C(k) = - \frac{\psi^{(+)}(k)}{k\beta^2} \frac{(\lambda_1^2 - k^2\beta^2)(\lambda_2^2 - k^2\beta^2)}{(\lambda_2^2 - k^2\beta^2)\lambda_1 \operatorname{ctgh} \lambda_1 - (\lambda_1^2 - k^2\beta^2)\lambda_2 \operatorname{ctgh} \lambda_2}, \quad (10)$$

$$D(k) = - \frac{\psi^{(-)}(k)}{k\beta^2} \frac{(\lambda_1^2 - k^2\beta^2)(\lambda_2^2 - k^2\beta^2)}{(\lambda_2^2 - k^2\beta^2)\lambda_1 \operatorname{tgh} \lambda_1 - (\lambda_1^2 - k^2\beta^2)\lambda_2 \operatorname{tgh} \lambda_2} \quad (11)$$

mit

$$\psi^{(+)}(k) = \frac{1}{2} [J_0(k\varrho_K) + J_0(k\varrho_A)], \quad (12)$$

$$\psi^{(-)}(k) = \frac{1}{2} [J_0(k\varrho_K) - J_0(k\varrho_A)], \quad (13)$$

worin ϱ_K und ϱ_A die durch a dividierten Elektrodenradien sind. (Einsetzen der Gln. (10) bis (13) in die Gln. (8) und (9) liefert die Gln. (I.18) und (I.19).)

Für symmetrische Konfigurationen mit $\varrho_K = \varrho_A$ verschwindet $\psi^{(-)}(k)$ nach Gl. (13), damit $D(k)$ nach Gl. (11), so daß f und g nach den Gln. (8) und (9) nur noch Terme in $\sinh \lambda_1 \zeta$, $\sinh \lambda_2 \zeta$ enthalten, d.h. antisymmetrisch zu $\zeta = 0$ sind. Die zu $-\partial \hat{V} / \partial \zeta$ proportionale Stromdichte ist dann symmetrisch zu $\zeta = 0$. Für $\zeta = 0$ verschwindet $\partial^2 \hat{V} / \partial \zeta^2$, d.h. die

Stromdichteverteilung ist dort am stärksten verbreitert, wie auch von der Anschauung her zu erwarten ist.

Die Normierung der Lösungen ergibt sich aus

$$-\int_0^{\infty} (\partial \hat{V} / \partial \zeta) \varrho d\varrho = 1 \quad \text{für alle } \zeta. \quad (\text{I.20})$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$2\pi \int_0^{\infty} j_z r dr = I \quad \text{für alle } z.$$

wo I der Bogenstrom ist. Vergleich beider Gleichungen liefert, mit

$$j_z = -\sigma(\partial V / \partial z) = -\sigma(V_0/z_0)(\partial \hat{V} / \partial \zeta)$$

die Konstante

$$V_0 = z_0 I / 2\pi a^2 \sigma. \quad (\text{I.21})$$

Für die rechte Seite der Gl. (15) kann eine Näherung angegeben werden. Dazu sind die durch die Gln. (4) und (5) gegebenen Größen λ_1 und λ_2 zu betrachten. Nach den Gln. (6) und (7) gilt³

$$q/p^2 = 4\beta^2 \gamma^2 k^4 / [\gamma^2 + k^2(\beta^2 + \gamma^2)]^2.$$

q/p^2 wächst demnach monoton mit k und strebt für $k \rightarrow \infty$ dem Grenzwert $4\beta^2 \gamma^2 / (\beta^2 + \gamma^2)^2$ zu. Für $\omega_e^2 \tau_e^2 \ll 1$ ist $\beta = \gamma = z_0/a$, der Grenzwert somit $(2a/z_0)^2$, d.h. klein gegen 1 für $z_0 \gg a$. Ist $\omega_e^2 \tau_e^2$ nicht klein gegen 1, so ist $\beta < \gamma$, d.h.

$$\frac{4\beta^2 \gamma^2}{(\beta^2 + \gamma^2)^2} \approx 4 \frac{\beta^2}{\gamma^2} = 4 \frac{\sigma'}{\sigma} \frac{\mu''}{\mu'} < \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{1}{1 + \omega_e^2 \tau_e^2}$$

und damit nach Voraussetzung klein gegen 1. Außer in dem Fall, daß zugleich $\omega_e^2 \tau_e^2 \ll 1$ und z_0 nicht groß gegen a sind (was für sehr schwache Magnetfelder zutrifft), ist somit $q/p^2 \ll 1$ und deshalb näherungsweise

$$\lambda_1 = \sqrt{2p} = \gamma \sqrt{1 + k^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)}, \quad (\text{16})$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{q}{2p}} = \beta \sqrt{\frac{k^2}{1 + k^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)}}. \quad (\text{17})$$

Wegen $1 < 1 + \beta^2/\gamma^2 < 2$ hängt λ_1 praktisch nur von γ , λ_2 praktisch nur von β ab.

Setzt man nun diese Näherungen für λ_1 und λ_2 in Gl. (15) ein und schätzt die Terme im Zähler und

2. Diskussion der Lösungen, Skalengesetze und weitere Beispiele

In diesem Abschnitt sollen durch Diskussion der Lösungen, wie sie durch die Gln. (8) bis (13) gegeben sind, allgemeine Aussagen über die Verbreiterung der Stromdichteverteilung in Abhängigkeit von den Parametern β und γ hergeleitet werden. Dazu wird zunächst für den Fall zweier Punktelektroden auf der Achse die zur Stromdichte proportionale Größe $-\partial \hat{V} / \partial \zeta$ in der Ebene $\zeta = 0$ betrachtet, also dort, wo die Verteilung am stärksten „auseinander-gelaufen“ ist. Betrachtet wird also

$$-\frac{\partial \hat{V}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = -\int_0^{\infty} \frac{\partial f_p}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} J_0(k\varrho) k dk. \quad (\text{14})$$

Wegen der Symmetrie der Anordnung ist $\psi^{(-)}(k) = 0$; für Punktelektroden ist, mit $J_0(0) = 1$ nach Gl. (12) $\psi^{(+)}(k) = 1$. Aus den Gln. (8) und (10) folgt damit

$$-\frac{\partial f_p}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \frac{(\lambda_2^2 - k^2 \beta^2) \lambda_1 / \sinh \lambda_1 - (\lambda_1^2 - k^2 \beta^2) \lambda_2 / \sinh \lambda_2}{(\lambda_2^2 - k^2 \beta^2) \lambda_1 \operatorname{ctgh} \lambda_1 - (\lambda_1^2 - k^2 \beta^2) \lambda_2 \operatorname{ctgh} \lambda_2}. \quad (\text{15})$$

Nenner jeweils gegeneinander ab, so findet man, daß für alle k die Terme in λ_2 groß gegen die in λ_1 sind. Damit erhält man für Gl. (14) die Näherung

$$-\frac{\partial \hat{V}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\cosh \lambda_2} J_0(k\varrho) k dk. \quad (\text{18})$$

Gl. (18) erklärt sofort, warum β der dominierende Parameter ist. Die Terme in λ_1 sind vernachlässigbar und λ_2 hängt nach Gl. (17) nur sehr schwach von γ ab.

Weiterhin läßt sich aus Gl. (18) die Breite der Stromdichteverteilung angeben. Dazu soll das Maximum von

$$\frac{k}{\cosh \lambda_2} = \frac{2k}{e^{\lambda_2} + e^{-\lambda_2}} = \frac{2ke^{-\lambda_2}}{1 + e^{-2\lambda_2}}$$

bestimmt werden. Nach Gl. (17) ist $\lambda_2 = k^2 \beta$ für $k^2 \ll 1$, $\lambda_2 = k\beta/\sqrt{1 + \beta^2/\gamma^2}$ für $k^2 \gg 1$. Für $\beta \ll 1$ ist $\exp(-\lambda_2)$ somit erst dann von 1 merklich verschieden, wenn $k^2 \gg 1$ ist. Deshalb darf für $\beta \ll 1$ im Zähler durchweg $\lambda_2 = k\beta/\sqrt{1 + \beta^2/\gamma^2}$ gesetzt werden. Für $\beta \gg 1$ ist dagegen $\exp(-\lambda_2)$ schon für $k^2 \ll 1$ klein gegen 1, so daß hier $\lambda_2 = k^2 \beta$ eine brauchbare Näherung darstellt. Der Nenner ist in beiden Fällen erst dann merklich von 2 verschieden, wenn der Zähler klein wird, d.h. $2/(1 + e^{-2\lambda_2})$ darf durch 1 ersetzt werden. Das liefert die Näherungen

$$\frac{k}{\cosh \lambda_2} = k \exp\{-k\beta/\sqrt{1+\beta^2/\gamma^2}\} \quad \text{für } \beta \ll 1, \quad (19)$$

$$\frac{k}{\cosh \lambda_2} = k \exp\{-k^2\beta\} \quad \text{für } \beta \gg 1. \quad (20)$$

Für den Wert k_0 , bei dem $k/\cosh \lambda_2$ sein Maximum hat, findet man aus Gl. (19) $k_0 = \sqrt{1+\beta^2/\gamma^2}/\beta$, aus Gl. (20) $k_0 = 1/\sqrt{2}\beta$. Nun hat $J_0(k_0)$ seine erste Nullstelle bei $k_0 = 2,4$. Setzt man $\varrho_0 = 2,4/k_0$ als Breite der Stromdichte an, so findet man

$$\varrho_0 = \frac{2,4}{\sqrt{1+\beta^2/\gamma^2}} \beta \quad \text{für } \beta \ll 1, \quad (21)$$

$$\varrho_0 = 2,4 \sqrt{2}\beta \quad \text{für } \beta \gg 1. \quad (22)$$

Für $\beta = 1$ fallen beide Ausdrücke etwa zusammen. Die in Vielfachen von a gemessene Breite der Stromdichteverteilung wächst somit für $\beta \ll 1$ proportional zu β , für $\beta \gg 1$ nur noch proportional zu $\sqrt{\beta}$.

Die Gln. (21) und (22) enthalten die Skalengesetze für die Verbreiterung der Stromdichteverteilung. Sie werden übersichtlicher, wenn man sie mit $r_0 = a \varrho_0$ auf absolute Größen umrechnet. Das ergibt

$$r_0 = 2,4 \frac{z_0}{\sqrt{1+\omega_e^2 \tau_e^2}} \quad \text{für } \beta \ll 1, \quad (23)$$

$$r_0 = 2,4 \sqrt{\frac{z_0}{1+\omega_e^2 \tau_e^2}} \sqrt{2} a \quad \text{für } \beta \gg 1. \quad (24)$$

Für $\beta \ll 1$ wächst r_0 also linear mit dem Elektrodenabstand $2z_0$, für $\beta \gg 1$ wie $\sqrt{2z_0}$. Die Abhängigkeit vom Magnetfeld ist für $\beta \ll 1$ aus Gl. (23) leicht zu entnehmen:

$$r_0 \sim z_0 \quad \text{für } \beta \ll 1 \quad \text{und} \quad \omega_e^2 \tau_e^2 \ll 1, \\ r_0 \sim z_0/B \quad \text{für } \beta \ll 1 \quad \text{und} \quad \omega_e^2 \tau_e^2 \gg 1.$$

Für $\beta \gg 1$ ist sie komplizierter. Es soll deshalb nur der Fall $\omega_i^2 \tau_i^2 \gg 1$ explizit angegeben werden. Dann ist $a \sim 1/B$, so daß sich $r_0 \sim \sqrt{z_0}/B$ für $\beta \gg 1$ und $\omega_i^2 \tau_i^2 \gg 1$ ergibt.

Für nicht rotierendes Plasma ist die Stromdichteverteilung eines zwischen zwei Punktelektroden auf der Achse brennenden Bogens nach RAEDER und WIRTZ² durch

$$-\sigma \frac{\partial V^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{I}{2\pi} \frac{\sqrt{\sigma'/\sigma} z_0}{(r^2 + (\sigma'/\sigma) z_0^2)^{3/2}} \quad (I.7)$$

gegeben. (Der Index 0 soll hier auf die Annahme $v_\phi = 0$ hinweisen und zur Unterscheidung zu $V(r, z)$ für rotierendes Plasma dienen.) Aus Gl. (I.7) folgt, daß die Breite dieser Verteilung durch

$$z_0' = \sqrt{\sigma'/\sigma} z_0 = z_0/\sqrt{1+\omega_e^2 \tau_e^2}$$

gegeben ist. Das entspricht dem Fall $\beta \ll 1$, wie Vergleich mit Gl. (23) zeigt. Das bedeutet, daß für $\beta \ll 1$ Hall-Strom und Rotation in vergleichbarem Maße zur Begrenzung der radialen Ausdehnung des Plasmastromes beitragen, während für $\beta \gg 1$ die Rotation der dominierende Effekt ist.

Ein weiteres Maß für die Konzentration des Bogenstromes auf die Achsenumgebung ist der Achsenwert von $-\partial \hat{V}/\partial \zeta$ bei $\zeta = 0$. Rechnet man Gl. (I.7) auf die reduzierten Koordinaten ϱ, ζ um und setzt noch $V^{(0)} = V_0 \hat{V}^{(0)}$, worin V_0 wieder die im ersten Abschnitt angegebene, durch Gl. (I.21) definierte Konstante ist, so findet man analog zu Gl. (I.20)

$$-\int_0^\infty (\partial \hat{V}^{(0)}/\partial \zeta) \varrho d\varrho = 1 \quad \text{für alle } \zeta.$$

und aus Gl. (I.7) erhält man

$$-\beta^2 \frac{\partial \hat{V}^{(0)}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \frac{1}{(1+\varrho^2/\beta^2)^{3/2}}. \quad (25)$$

Nach Gl. (25) ist der Achsenwert von $-\beta^2 \partial V^{(0)}/\partial \zeta$ also 1 für alle β . Für rotierendes Plasma folgt dagegen mit $J_0(0) = 1$ aus Gl. (18) und den Näherungen (19) und (20)

$$-\beta^2 \frac{\partial \hat{V}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0, \varrho=0} = 1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}, \quad \text{für } \beta \ll 1, \quad (26)$$

$$-\beta^2 \frac{\partial \hat{V}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0, \varrho=0} = \frac{1}{2} \beta \quad \text{für } \beta \gg 1. \quad (27)$$

Für $\beta = 1$ stimmen beide Näherungen wieder grob überein. Der Vergleich der Gln. (26) und (27) mit Gl. (25) zeigt noch einmal, daß für $\beta \ll 1$ die Rotationsbewegung und der Hall-Strom elektromotorische Gegenkräfte gleicher Größenordnung liefern, während für $\beta \gg 1$ die Begrenzung der radialen Ausdehnung des Bogenstromes überwiegend durch die Rotation des Plasmas bewirkt wird.

Zum Abschluß der Diskussion der Strombegrenzung für einen zwischen Punktelektroden brennenden Bogen soll die Brauchbarkeit der durch Gl. (18) gegebenen Näherung anhand einiger Beispiele demonstriert werden. Die Abb. 1a bis 1c stellen den Verlauf der „reduzierten Stromdichte“ $-\beta^2 \partial \hat{V}/\partial \zeta$ in der Ebene $\zeta = 0$ als Funktion von ϱ/β für verschiedene Werte von β dar. Diese Kurven wurden durch numerische Integration der Gl. (14) unter Verwendung des exakten Ausdrucks (15) für $\partial f_p/\partial \zeta$ gewonnen. In den Abb. 1a und 1b durchläuft β die Werte 0,1, 1 und 10, wobei in Abb. 1a $\gamma = \beta$, in

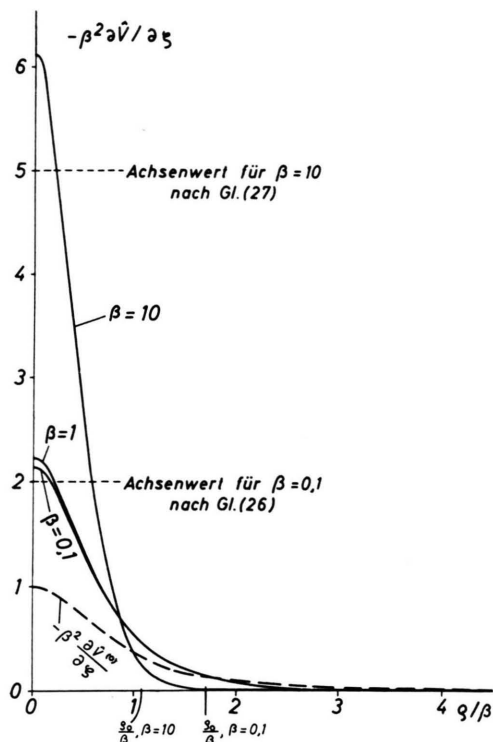


Abb. 1 a.

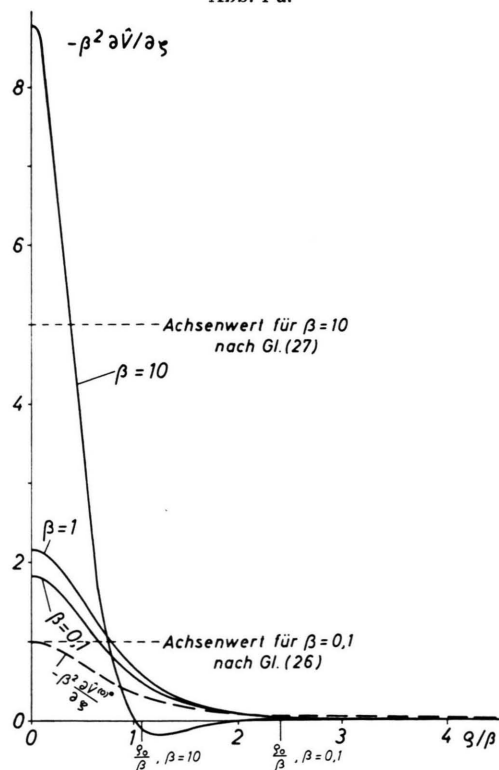


Abb. 1 b.

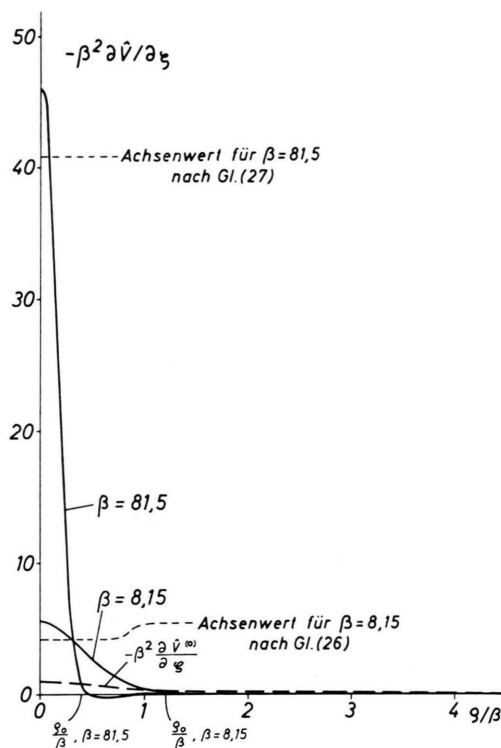


Abb. 1 c.

Abb. 1a–c. „Reduzierte Stromdichte“ $-\beta^2 \partial \hat{V} / \partial \xi$ als Funktion von q/β für rotierende (ausgezogen) und nicht rotierende Plasmen. Auf der Abszisse ist q_0/β eingetragen. q_0 ist die durch Gl. (21) bzw. Gl. (22) gegebene „Breite“ der Stromdichteverteilung. — 1a) $\gamma = \beta$. Die Kurven $\beta = 1$ und $\beta = 10$ sind Transformationen der Abb. 5a und 6a im ersten Teil der Arbeit. — 1b) $\gamma = 100\beta$. Die Kurven $\beta = 1$ und $\beta = 10$ sind Transformationen der Abb. 5d und 6d im ersten Teil. — 1c) $\gamma = 1,4\beta$. Die Kurven $\beta = 8,15$ und $\beta = 81,5$ sind Transformationen der Abb. 5b und 6b im ersten Teil.

Abb. 1 b dagegen $\gamma = 100\beta$ gilt. Der Vergleich dieser beiden Abbildungen zeigt noch einmal deutlich den relativ geringen Einfluß des Parameters γ . Auf den Abszissen ist q_0/β angegeben, wo q_0 durch die Gln. (21) bzw. (22) gegeben ist; auf den Ordinaten sind die Achsenwerte nach den Gln. (26) bzw. (27) eingezeichnet. Ferner wurde die „reduzierte Stromdichte“ $-\beta^2 \partial \hat{V}^{(0)} / \partial \xi$ für nicht rotierendes Plasma in die Diagramme aufgenommen; nach Gl. (25) ist das für alle β die gleiche Funktion mit dem Achsenwert 1. Infolge der Normierungseigenschaften gilt auch

$$-\beta^2 \int_0^\infty \frac{\partial \hat{V}}{\partial \xi} \frac{q}{\beta} d\left(\frac{q}{\beta}\right) = 1;$$

das gilt ebenso für $-\beta^2 \partial \tilde{V}^{(0)} / \partial \tilde{z}$. Besonders soll noch darauf hingewiesen werden, daß mehrere der in den Abb. 1a bis 1c dargestellten Kurven Transformationen von Stromdichteverläufen sind, die in den Abb. 5a bis 6d im ersten Teil der Arbeit gezeigt wurden. Das ist in den Unterschriften jeweils angegeben.

Das Ergebnis der bisherigen Diskussion läßt sich somit folgendermaßen zusammenfassen: Die Stromdichteverteilung eines zwischen zwei Punktelektroden im Abstand $2z_0$ brennenden Lichtbogens ist in der Ebene am stärksten verbreitert, die die Anordnung halbiert. Die Breite der Stromdichteverteilung hängt von zwei charakteristischen Längen ab, nämlich von

$$z_0' = z_0 / \sqrt{1 + \omega_e^2 \tau_e^2}$$

und von der durch Gl. (1) gegebenen Länge a , in die die Viskosität des Plasmas eingeht. Ist $\beta = z_0'/a$ von der Größenordnung 1 oder kleiner, so tragen Rotation und Hall-Strom in vergleichbarem Maße zur Begrenzung des Bogenstromes bei. Die Breite der Stromdichteverteilung ist dann von der Größenordnung z_0' , und damit für $\omega_e^2 \tau_e^2 \gg 1$ proportional zu z_0/B . Ist dagegen $\beta \gg 1$, so spielt die Rotation die führende Rolle für die Konzentration des Stromes auf die Umgebung der Achse. Die Breite der Stromdichteverteilung ist dann um so kleiner gegen z_0' , je größer β ist; für $\omega_i^2 \tau_i^2 \gg 1$ ist sie proportional zu $\sqrt{z_0}/B$.

Diese für die radiale Ausdehnung eines zwischen Punktelektroden brennenden Lichtbogens gefundenen Skalengesetze lassen sich wegen der Linearität der Gleichungen auf andere Elektrodenkonfigurationen übertragen, solange man die Symmetrie der Anordnung, d.h. gleiche Geometrie für Kathode und Anode, beibehält. Den Übergang von Punkt- auf Kreislinienelektroden vom reduzierten Radius $\varrho_E = r_E/a$ kann man sich dadurch hergestellt denken, daß man den Kreis vom Radius ϱ_E mit Punktelektroden belegt denkt. Da der von jeder der Elektroden ausgehende Strom in der Mittelebene den Radius ϱ_0 hat, ist der Radius des Gesamtstromes nur unmerklich größer als ϱ_0 , wenn $\varrho_E \ll \varrho_0$ gilt. Umgekehrt wird die Stromdichteverteilung für $\varrho_E \gg \varrho_0$ ringförmig sein und dann ihr Maximum bei $\varrho = \varrho_E$ haben. Ein Beispiel für einen solchen Fall zeigen die Abb. 2 und 3. Hier ist $\varrho_E = 10$ und $\beta = 2,91$, was nach Gl. (22) $\varrho_0 = 5,8$ liefert. Schon für dieses mäßige Verhältnis ϱ_E/ϱ_0 bleibt also die

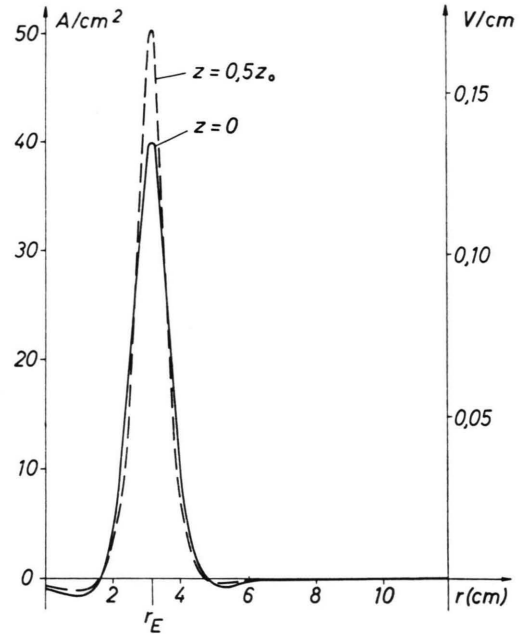


Abb. 2. Stromdichteverteilung eines Lichtbogens, der zwischen zwei kreislinienförmigen Elektroden mit gleichen Radien brennt. Elektrodenradius $r_E = 10a = 3,17$ cm, Elektrodenabstand $2z_0 = 11,1$ cm, $\beta = 2,91$, $\gamma = 17,4$. Bogenstrom 1 kA, Magnetfeld 1 kG. Die Skala am rechten Rand gibt E_z an.

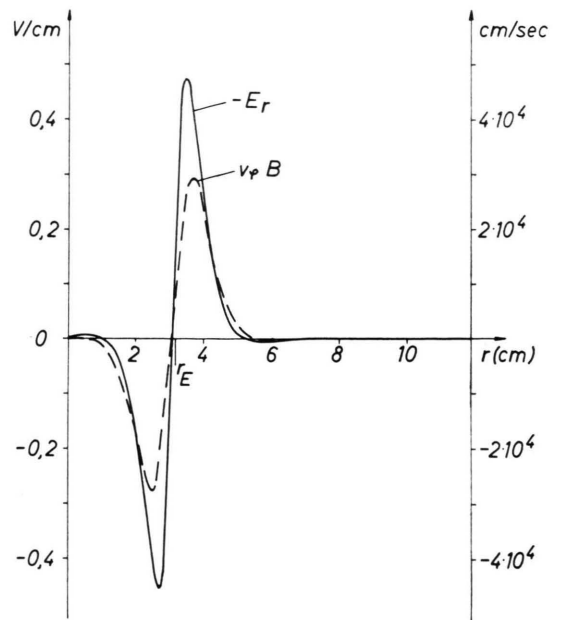


Abb. 3. $-E_r$ und $v_\phi B$ in der Ebene $z = 0,5z_0$ für den Lichtbogen mit den in Abb. 2 gegebenen Daten. Die Skala am rechten Rand gibt v_ϕ an.

Stromdichteverteilung auf der ganzen Bogenlänge ringförmig. Da der Strom für $\varrho < \varrho_E$ nach innen, für $\varrho > \varrho_E$ nach außen fließt, haben E_r und v_φ bei $\varrho = \varrho_E$ Nulldurchgänge.

Geht man nun weiter von Kreislinien zu Kreisingen als Elektroden über, so wird man keine merklichen Unterschiede erhalten, solange die Breite der Kreisinge klein gegen ϱ_0 bleibt. Kreisinge größerer Breite oder auch Kreisscheiben kann man sich aber aus solchen hinreichend schmalen Kreisingen zusammengesetzt denken; von dieser Möglichkeit wird im nächsten Abschnitt Gebrauch gemacht. Für die Verbreiterung der Stromdichteverteilung in der Mittelebene ergibt sich aus dieser Superposition, daß der Stromquerschnitt nur unwesentlich größer als der Elektrodenquerschnitt wird, wenn ϱ_0 klein gegen den in Vielfachen von a gemessenen Elektrodenradius im Fall von Kreisscheiben, bzw. klein gegen die Ringbreite im Fall von Kreisingen ist.

Für unsymmetrische Elektrodenkonfigurationen liegen die Verhältnisse wesentlich komplizierter. Für die Stromdichteverteilung in der Mittelebene läßt sich jedoch folgende Feststellung treffen: Wegen $\sinh 0 = 0$ liefert der antisymmetrische Anteil von $-\partial\hat{V}/\partial\zeta$ keinen Beitrag zur Stromdichteverteilung bei $\zeta = 0$. Der Integrand in Gl. (18) ist jetzt um

$$\psi^{(+)}(k) = \frac{1}{2} [J_0(k\varrho_K) + J_0(k\varrho_A)] \quad (12)$$

zu erweitern. Für $|\varrho_K - \varrho_A| \gg \varrho_0$ überlappen sich $J_0(k\varrho_K)$ und $J_0(k\varrho_A)$ nur wenig, so daß die Geometrie beider Elektroden in die Stromdichteverteilung eingeht. Ein Beispiel für einen solchen Fall zeigt Abbildung 4. Hier ist die Kathode punktförmig, die Anode eine Kreislinie vom Radius $\varrho_A = 10$. Das macht sich als Nebenmaximum bemerkbar.

3. Näherungsverfahren zur Behandlung von Bögen mit ausgedehnten Elektroden

Ausgangspunkt für die Behandlung radial ausgedehnter Elektroden sind die Gln. (8) und (9). Die in diesen Gleichungen auftretenden Funktionen $C(k)$ und $D(k)$ sind so zu bestimmen, daß das Potential auf den Elektroden konstant ist, und daß die Stromdichte, bzw. $\partial\hat{V}/\partial\zeta$ nur auf den Elektroden von 0 verschieden ist. Dieses gemischte Randwertproblem führt bei endlicher Ausdehnung der Elektroden auf Integralgleichungen für $C(k)$ und $D(k)$,

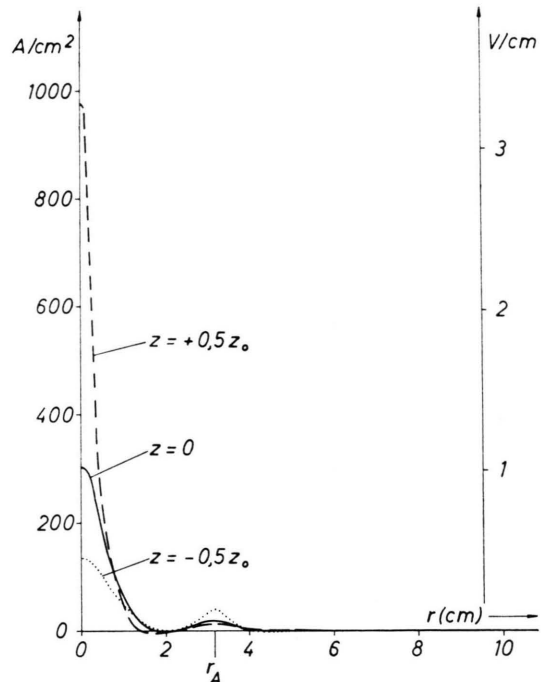


Abb. 4. Stromdichte eines Lichtbogens, der zwischen einer punktförmigen Kathode ($z = z_0$) und einer kreislinienförmigen Anode ($z = -z_0$) vom Radius $r_A = 10a = 3,17$ cm brennt. Alle weiteren Bogenparameter wie in Abb. 2. Die Skala am rechten Rand gibt wieder E_z an.

die nur numerisch gelöst werden könnten. Eine Vereinfachung des Aufwandes ergibt sich durch ein trial-and-error-Verfahren, das vom folgenden Ansatz ausgeht: Läßt man die Randbedingung, daß das Potential auf den Elektroden konstant ist, zunächst außer acht, so darf man die Stromdichteverteilung auf den Elektroden beliebig vorgeben. Durch diese Vorgabe lassen sich, wie gezeigt werden wird, $C(k)$ und $D(k)$ eindeutig bestimmen. Damit ist auch der radiale Potentialverlauf in den Ebenen $\zeta = -1$ und $\zeta = 1$ festgelegt. Durch Variation der willkürlich vorgegebenen Stromdichten auf Kathode und Anode läßt sich dann die Bedingung konstanter Elektrodenpotentiale näherungsweise erfüllen.

Der Gang dieses Verfahrens soll jetzt skizziert werden. Im allgemeinen rotationssymmetrischen Fall hat man es mit kreisringförmigen Elektroden zu tun; ϱ_K und ϱ_A seien die Innenradien, P_K und P_A die Außenradien von Kathode und Anode, gemessen in Vielfachen von a . Die dort vorgegebenen Stromdichteverteilungen seien φ_K und φ_A ; sie lassen sich in der Form

$$\varphi_K(\varrho) = \int_0^{\infty} \chi_K(k) J_0(k\varrho) k dk, \quad (28a)$$

$$\varphi_A(\varrho) = \int_0^{\infty} \chi_A(k) J_0(k\varrho) k dk \quad (28b)$$

darstellen, wobei

$$\chi_K(k) = \int_{\varrho_K}^{P_K} \varphi_K(\varrho) J_0(k\varrho) \varrho d\varrho, \quad (29a)$$

$$\chi_A(k) = \int_{\varrho_A}^{P_A} \varphi_A(\varrho) J_0(k\varrho) \varrho d\varrho \quad (29b)$$

gilt⁴. Bildet man nun

$$-\frac{\partial \hat{V}}{\partial \zeta} = - \int_0^{\infty} \frac{\partial f(k, \zeta)}{\partial \zeta} J_0(k\varrho) k dk,$$

worin $f(k, \zeta)$ durch Gl. (8) gegeben ist, so muß dieser Ausdruck für $\zeta = 1$ mit der rechten Seite von Gl. (28a), für $\zeta = -1$ mit der rechten Seite von Gl. (28b) übereinstimmen.

Da das für alle ϱ gelten muß, ist Gleichheit der Integranden zu fordern. Das liefert zwei Bestimmungsgleichungen für $C(k)$ und $D(k)$. Die Durchführung dieser Rechnung ergibt, daß $C(k)$ und $D(k)$ weiterhin durch die Gln. (10) und (11) gegeben sind, wofern jetzt unter den Funktionen $\psi^{(+)}(k)$, $\psi^{(-)}(k)$ nicht mehr die durch die Gln. (12) und (13) definierten, sondern statt dessen

$$\psi^{(+)}(k) = \frac{1}{2} [\chi_K(k) + \chi_A(k)], \quad (30a)$$

$$\psi^{(-)}(k) = \frac{1}{2} [\chi_K(k) - \chi_A(k)] \quad (30b)$$

verstanden werden. Ebenso wie für radial nicht ausgedehnte Elektroden gelten für symmetrische Konfigurationen mit $\psi^{(-)}(k) = 0$ die schon im ersten Teil der Arbeit und hier nochmals im ersten Abschnitt angegebenen Symmetrieeigenschaften. Ferner bleibt die Aussage bestehen, daß für symmetrische Elektroden die Stromdichteverteilung in der Ebene $\zeta = 0$ am stärksten verbreitert ist.

Der praktische Nutzen des hier dargestellten Verfahrens hängt natürlich daran, daß die Funktionen $\chi_K(k)$, $\chi_A(k)$ als Integrale gemäß den Gln. (29a, b) geschlossen darstellbar sind und außerdem — zwecks Erzielung eines auf den Elektroden konstanten Potentialverlaufs — hinreichend viele freie Parameter enthalten. Die einfachste Möglichkeit, beides zu erreichen, besteht darin, auf den Elektroden stückweise konstante Stromdichteverteilungen anzunehmen. Dazu werden die Elektroden in Intervalle

aufgeteilt und es wird

$$\varphi_K(\varrho) = \begin{cases} a_i/N_K & \text{für } \varrho_{i-1} \leq \varrho \leq \varrho_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\varphi_A(\varrho) = \begin{cases} b_j/N_A & \text{für } \varrho_{j-1} \leq \varrho \leq \varrho_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt. Dabei gilt $\varrho_{i=0} = \varrho_K$, $\varrho_m = P_K$, $\varrho_{j=0} = \varrho_A$, $\varrho_n = P_A$. Die Koeffizienten a_i , b_j sind beliebig wählbar, wenn die Normierungsfaktoren N_K , N_A durch

$$N_K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m a_i (\varrho_i^2 - \varrho_{i-1}^2),$$

$$N_A = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n b_j (\varrho_j^2 - \varrho_{j-1}^2)$$

definiert werden, womit

$$\int_0^{\infty} \varphi_{K,A}(\varrho) \varrho d\varrho = 1$$

gewährleistet wird. — $\partial \hat{V}/\partial \zeta$ ist dann — ebenso wie für Punktelektroden — auf 1 normiert. Setzt man die obigen Ausdrücke für $\varphi_K(\varrho)$, $\varphi_A(\varrho)$ in die Gln. (29a, b) ein, so ergibt sich

$$\chi_K(k) = \frac{1}{k N_K} \sum_{i=1}^m a_i [\varrho_i J_1(k\varrho_i) - \varrho_{i-1} J_1(k\varrho_{i-1})],$$

$$\chi_A(k) = \frac{1}{k N_A} \sum_{j=1}^n b_j [\varrho_j J_1(k\varrho_j) - \varrho_{j-1} J_1(k\varrho_{j-1})].$$

Einsetzen dieser beiden Ausdrücke in die Gln. (30a, b) liefert dann eine anpassungsfähige Ausgangsnäherung für die „richtigen“ Stromdichteverteilungen auf den Elektroden, d. h. für diejenigen, die konstante Elektrodenpotentiale liefern.

Die Brauchbarkeit dieses Verfahrens wurde zunächst für kreisscheibenförmige Elektroden mit gleichen Radien ($\varrho_K = \varrho_A = 0$, $P_K = P_A = P_E$) getestet. Ein Beispiel dafür ist ein Bogen mit folgenden Daten:

Elektrodenradius $R_E = 1$ cm
 Elektrodenabstand $2z_0 = 27$ cm
 Bogenstrom $I = 1,8$ kA
 Äußeres Magnetfeld $B = 10$ kG
 Wasserstoffplasma, Elektronendichte 10^{16} cm⁻³
 Temperatur 40 000 K.

Diese Daten wurden im Hinblick auf den Vergleich mit einem Experiment gewählt, auf das später eingegangen wird. Aus diesen Daten ergibt sich

$$a = 0,02 \text{ cm}; \quad \sigma = 90 \text{ A/V cm}; \quad \omega_e^2 \tau_e^2 = 32; \\ \beta = 117,4; \quad \gamma = 675; \quad P_E = 50.$$

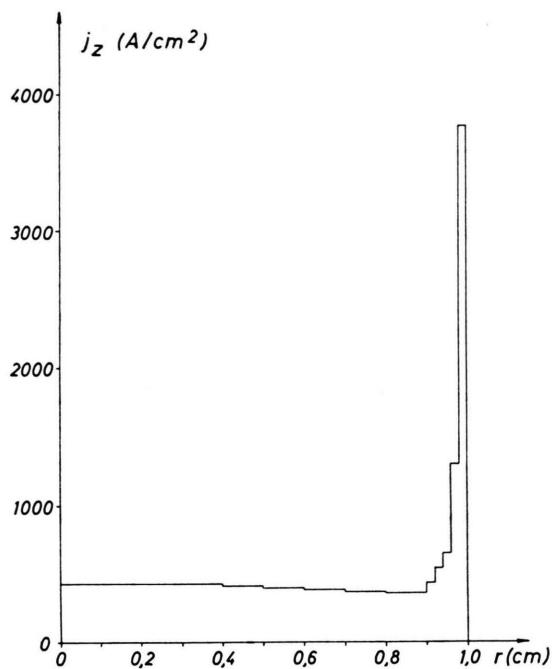


Abb. 5 a.

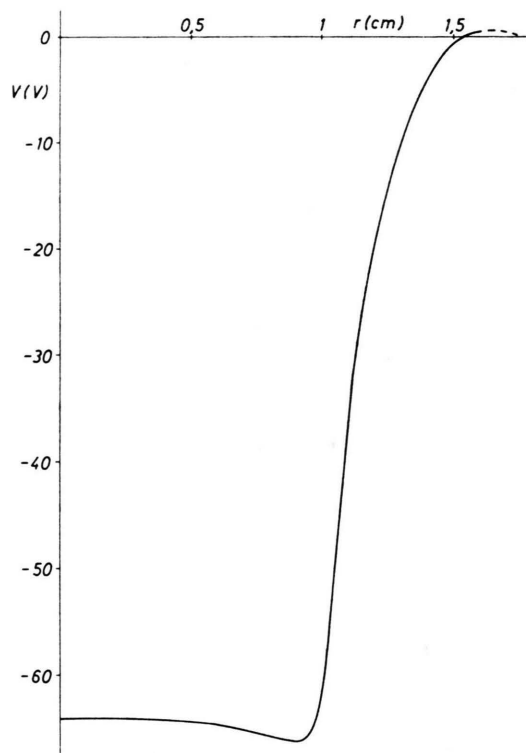


Abb. 5 b.

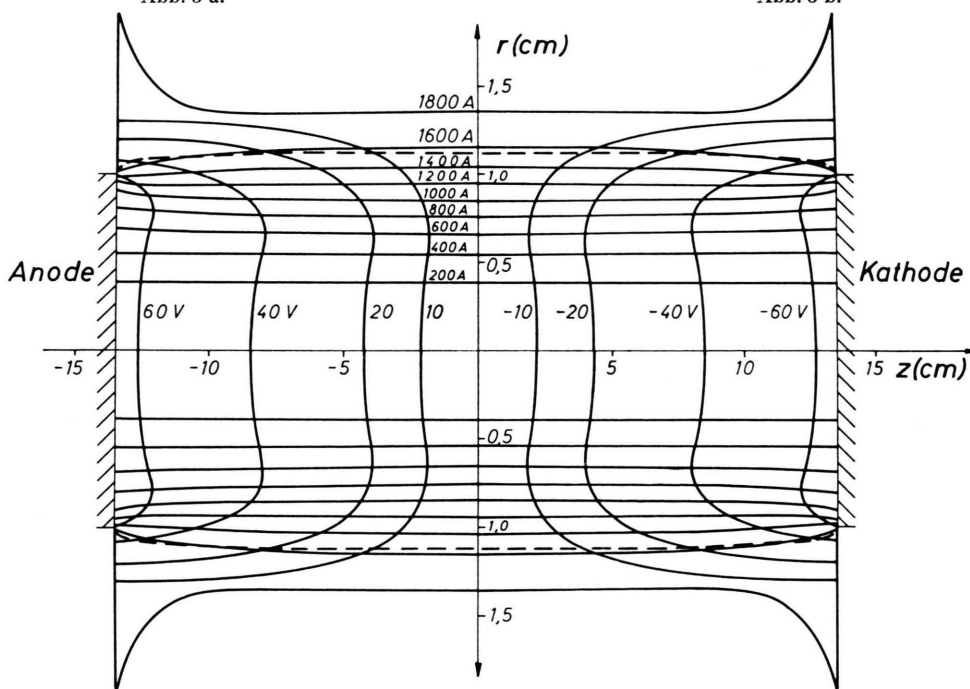


Abb. 5. Lichtbogen zwischen zwei kreisscheibenförmigen Elektroden vom gleichen Radius $R_E = 1$ cm. Elektrodenabstand $2z_0 = 27$ cm, Bogenstrom 1,8 kA, Magnetfeld 10 kG, $a = 0,02$ cm, $\beta = 117$, $\gamma = 675$. — 5a) Stromdichteverlauf auf den Elektroden. — 5b) Potentialverlauf in der Kathodenebene. — 5c) Strom- und Äquipotentiallinien. Die gestrichelte Kurve gibt den Ort maximaler Rotationsgeschwindigkeit an.

Zur Einstellung der „richtigen“ Stromdichteverteilung auf den Elektroden erwies es sich als zweckmäßig, den Bereich $0 \leq \varrho \leq 45$ in 9 Intervalle der Breite 5, den Bereich $45 \leq \varrho \leq 50$ in 5 Intervalle der Breite 1 aufzuteilen, so daß 14 Koeffizienten variiert werden konnten. Nach 20 Versuchen konnte mit der in Abb. 5a dargestellten vorgegebenen Stromdichte der in Abb. 5b dargestellte Potentialverlauf auf den Elektroden erzielt werden. Das Potential ist bis auf 2% konstant. Abb. 5c zeigt den Verlauf der Strom- und der Äquipotentiallinien in diesem Bogen. Es sei darauf hingewiesen, daß die Stromlinie für den Gesamtstrom $I = 1800$ A im Endlichen verläuft; außerhalb dieser Stromlinie gibt es noch eine solche mit einem um 2,5% größeren Strom, und für noch größere Radien wird j_z negativ. Es zeigt sich hier also das gleiche Verhalten, wie es auch für einige Bögen mit Punktelektroden im ersten Teil der Arbeit gefunden wurde, und es erklärt sich natürlich auf die gleiche Weise.

Erheblich größere Schwierigkeiten als ein symmetrischer Lichtbogen bereitet jedoch schon der nächst komplizierte Fall, nämlich der zweier Kreisscheibenelektroden mit verschiedenen Radien. Das liegt nicht nur daran, daß jetzt zwei Sätze von Parametern für die Stromdichteverteilungen auf den Elektroden zu variieren sind. Eine Diskussion der Gln. (8) und (11) zeigte vielmehr, daß für $D(k) \neq 0$ bereits kleine Veränderungen der Koeffizienten a_i , b_j zu erheblichen Veränderungen der Terme in $\cosh \lambda_1 \zeta$ und $\cosh \lambda_2 \zeta$ führen, vor allem dann, wenn die Elektrodenradien groß gegen a sind. In dem hier angesprochenen Fall, nämlich dem zweier kreisscheibenförmiger Elektroden mit verschiedenen Radien, kann man sich jedoch eine brauchbare Näherung durch folgende Überlegung verschaffen: Die Randbedingungen für die Elektrodenebenen fordern, daß die Rotationsgeschwindigkeit überall verschwindet, die Stromdichte außerhalb der Elektroden, und daß das Potential auf den Elektroden konstant ist. Vergleicht man nun damit das Verhalten dieser Größen in der Mittelebene eines zwischen zwei Elektroden mit gleichen Radien brennenden Lichtbogens, so findet man auf Grund der Symmetrieeigenschaften: Die Rotationsgeschwindigkeit verschwindet überall, ebenso das Potential, d.h. die ganze Mittelebene ist Äquipotentialfläche. Die Stromdichteverteilung wird nur innerhalb eines noch zu ermittelnden Radius wesentlich von 0 verschieden sein, wobei dieser nur geringfügig größer

als der Elektrodenradius r_E des symmetrischen Bogens ist, wenn $\varrho_E \gg \varrho_0$ ist. Dieser Vergleich legt folgendes Vorgehen nahe: Man ersetzt den Bogen mit kreisscheibenförmigen Elektroden verschiedener Radien durch einen symmetrischen Bogen doppelter Länge, wobei der Elektrodenradius gleich dem kleineren der beiden Elektrodenradien des darzustellenden Bogens ist. Die Stromdichteverteilung in der Mittelebene dieses „Ersatzbogens“ darf dann als Näherung für die Stromdichteverteilung auf der größeren Elektrode des ursprünglichen Bogens angesehen werden, falls praktisch der gesamte Strom des Ersatzbogens auf einen Radius beschränkt ist, der höchstens gleich dem größeren Elektrodenradius des ursprünglichen Bogens ist. Ist dies der Fall, so ergibt sich zugleich eine Aussage über das Potential: Das Potential ist ja nur bis auf eine frei wählbare additive Konstante bestimmt. Über diese wurde in dieser Arbeit so verfügt, daß V für $r \rightarrow \infty$ verschwindet. Ferner verschwindet V in der Mittelebene des Ersatzbogens für alle r . Ist der Ersatzbogen nun für den ursprünglich betrachteten Bogen repräsentativ, so ergibt sich, daß die Umgebung des ursprünglichen Bogens für hinreichend große Radien das Potential der größeren der beiden Elektroden annimmt.

4. Vergleich von Modellrechnungen mit experimentellen Ergebnissen

Das „Verdopplungsverfahren“ wurde benutzt, um die Resultate des hier entwickelten Plasmamodells mit den experimentellen Ergebnissen an einem von SCHWENN⁵⁻⁷ untersuchten Lichtbogen zu vergleichen. An diesem Bogen wurden die Potential- und die Stromdichteverteilung unabhängig voneinander in einer zwischen den Elektroden gelegenen Ebene gemessen. Aus $j_z = \sigma E_z$ läßt sich dann die lokale Leitfähigkeitstemperatur ermitteln; sie stimmt mit den Ergebnissen anderer Temperaturmessungen gut überein. Der Bogen ist auch von der Geometrie her gut für einen Vergleich geeignet. Abbildung 6, die einen Längsschnitt darstellt, zeigt nämlich, daß der Radius des Entladungsrohres groß gegen die Elektrodenradien ist, so daß die dem Modell zugrunde gelegte Annahme unendlicher radialer Ausdehnung praktisch nicht ins Gewicht fällt. Die bisher gebrachten Beispiele zeigten ja stets, daß die Rotationsgeschwindigkeit außerhalb des stromführenden Bereiches rasch abklingt. Außerdem ist

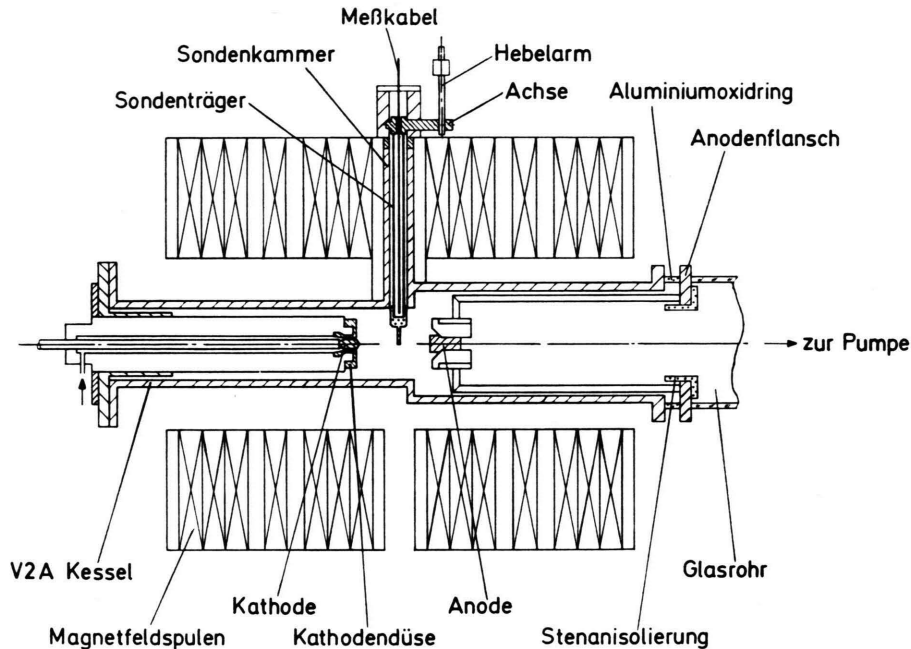


Abb. 6. Längsschnitt durch den von SCHWENN⁵⁻⁷ experimentell untersuchten Bogen („Normalbogen“).

in diesem Experiment das äußere Magnetfeld im ganzen Bogen homogen.

Die in Abb. 6 dargestellte Elektrodenkonfiguration wird von Schwenn als „Normalbogen“ bezeichnet, zur Unterscheidung vom sog. „Hohlbogen“, bei dem die Anode ringförmig ist, und auf den später eingegangen wird. Der „Normalbogen“ hat folgende Daten:

Elektrodenabstand $2z_0 = 13,5$ cm,
 Kathodenradius $R_K = 1$ cm,
 Anodenradius $R_A = 1,5$ cm,
 Bodenstrom $I = 1,8$ kA,
 Axiales Magnetfeld $B = 10$ kG.

Messungen der Elektronendichte zeigten, daß diese für $0 \leq r \leq 1$ cm praktisch konstant ist und $1,0 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ beträgt; die Temperatur fällt von 60000 K auf der Achse bis auf 20000 K bei $r = 1$ cm ab. Für das Modell wurde deshalb eine Temperatur von 40000 K angenommen.

Zur Bestimmung der Stromdichteverteilung auf den Elektroden wurde das oben erwähnte „Verdopplungsverfahren“ angewandt. Der „Ersatzbogen“ ist, wie Vergleich der Daten zeigt, der in Abb. 5c dargestellte symmetrische Bogen. Nach dieser Abbildung schneidet die Stromlinie, die den Strom 1,8 kA einschließt, die Mittelebene bei $r = 1,35$ cm. Da der Anodenradius 1,5 cm beträgt,

darf die kathodenseitige Hälfte des Ersatzbogens als modellmäßige Darstellung des „Normalbogens“ angesehen werden. In den Abbn. 7a bis d werden die gemessenen radialen Verläufe von j_z , V , E_z und E_r mit den gerechneten Ergebnissen verglichen. Die Meßebeine war von der Kathode 7,8 cm, von der Anode 5,7 cm entfernt; die Rechnungen wurden ebenfalls für diese Ebene durchgeführt.

Experiment und Modellrechnung zeigen übereinstimmend folgendes: Potential und axiale elektrische Feldstärke sind innerhalb des Radius, der dem kleineren Elektrodenradius, d.h. hier dem Kathodenradius entspricht, etwa konstant und fallen dann steil ab. Der Bogenstrom ist ebenso auf den Kathodenquerschnitt beschränkt. Abbildung 7c zeigt, daß die gemessene und die gerechnete E_z -Verteilung einander ähnlich sind, sogar in solchen Details wie dem schwachen Maximum bei $r \approx R_K$. Da nun im Modell $\sigma = \text{const}$ vorausgesetzt ist, während sich die Leitfähigkeit im Experiment von der Achse bis $r = 1$ cm um den Faktor 5 ändert, können die Stromdichteprofile gerade wegen der Ähnlichkeit der E_z -Profile einander nicht ähneln. Offensichtlich wirkt sich die Annahme $\sigma = \text{const}$ auf den Verlauf der Stromdichte stärker aus als auf den der Feldstärke und des Potentials. Die Umgebung der stromführenden Plasmasäule nimmt

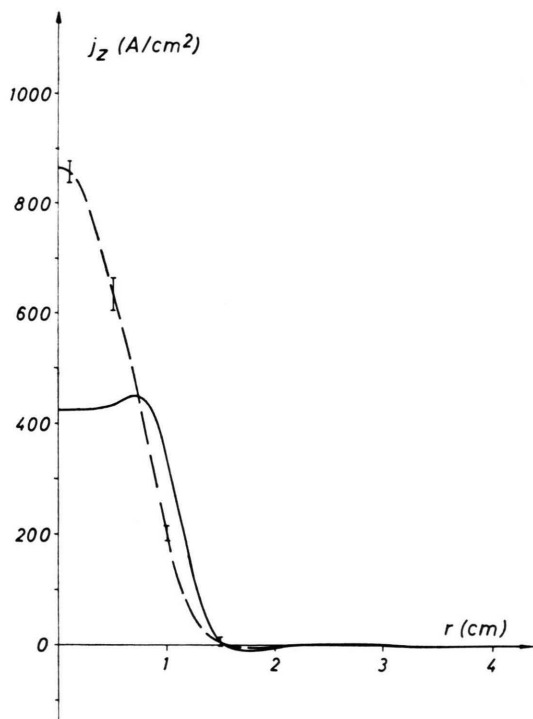


Abb. 7 a.

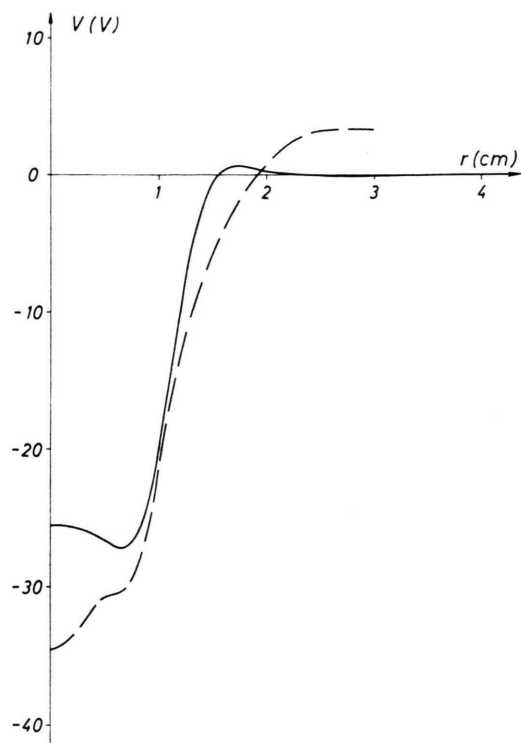


Abb. 7 b.

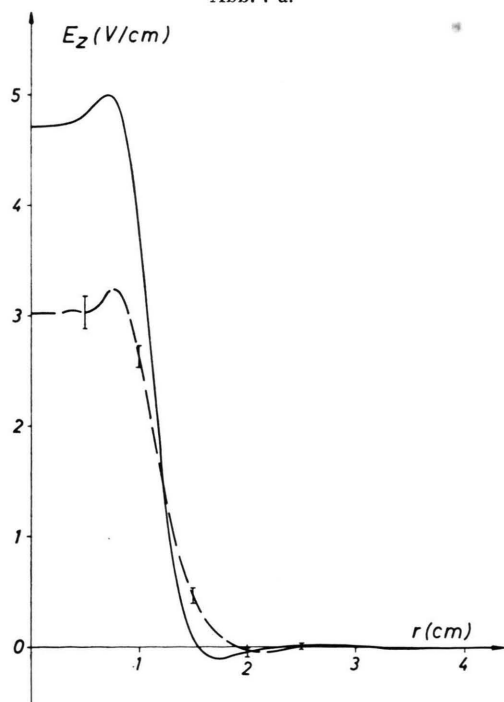


Abb. 7 c.

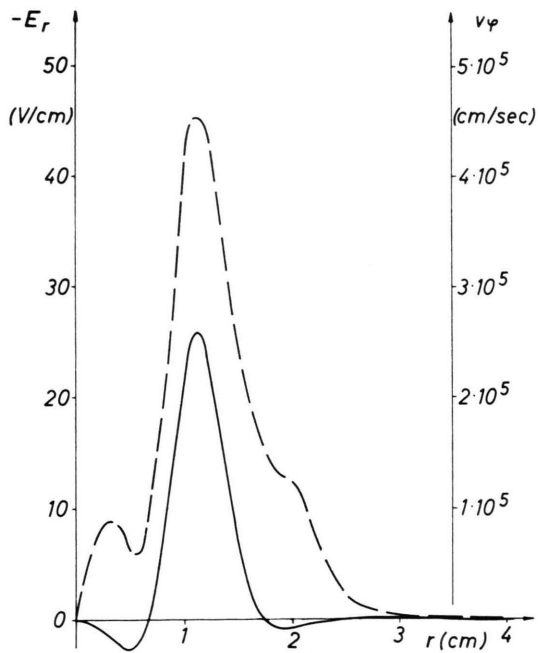


Abb. 7 d.

Abb. 7 a—d. Vergleich der Meßergebnisse von SCHWENN⁵⁻⁷ am „Normalbogen“ (gestrichelt) mit den Resultaten der Modellrechnung (ausgezogen), beides für eine Ebene, die etwa in der Mitte zwischen den Elektroden liegt. — 7 a) Stromdichte, 7 b) Potential, 7 c) axiale und 7 d) radiale elektrische Feldstärke. In 7 d) fallen die gerechneten Kurven für $-E_r$ und $v_\varphi B$ im Rahmen der Zeichengenauigkeit zusammen. Die Skala am rechten Rand gibt v_φ an.

etwa das Potential der größeren Elektrode, nämlich der Anode, an. Dort treten auch „rückläufige“ j_z - und E_z -Linien auf; eine Erklärung für diesen Effekt wurde bereits im ersten Teil der Arbeit gegeben: Die mechanische Kopplung benachbarter rotierender Plasmaschichten durch die innere Reibung kann dazu führen, daß die radiale elektrische Feldstärke lokal durch $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ überkompensiert wird. Dadurch entstehen Ströme, deren Stromlinien innerhalb des Plasmas in sich geschlossen sind und somit in bestimmten Bereichen den zwischen den Elektroden verlaufenden Stromlinien entgegengerichtet sind. Das ist in Abb. 7a, wenn auch schwach, zu erkennen, und zwar auch in der gemessenen Kurve. Wie die dort angegebenen Fehlerbalken zeigen, sind die gemessenen Beträge der negativen Stromdichte allerdings von gleicher Größe wie die Meßfehler. Gleichwohl wird man diese Kurve als experimentellen Beleg zu dem in dieser Arbeit aufgezeigten Effekt sekundärer d.h. innerhalb des Plasmas in sich geschlossener Stromlinien werten dürfen.

Zur quantitativen Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist noch folgendes zu bemerken: Die gerechneten Absolutwerte ergeben sich aus der Normierungskonstanten

$$V_0 = z_0 I / (2 \pi a^2 \sigma). \quad (\text{I.21})$$

Für das hier vorliegende Plasma ist — auch bei Berücksichtigung der Inhomogenität im Experiment — überall $\omega_e^2 \tau_e^2 \gg 1$, $\omega_i^2 \tau_i^2 \ll 1$. Somit ist a , wie im ersten Teil der Arbeit gezeigt wurde, proportional zur freien Weglänge der Elektronen, d.h. proportional zu T^2/n_e . Wegen $\sigma \sim T^{3/2}$ hängt V_0 wie $T^{-11/2}$, also sehr empfindlich, von der Temperatur ab. Eine kleine Änderung der für das Modell angenommenen Temperatur von 40000 K würde also genügen, um z.B. die E_z -Profile zumindest im Plateaubereich fast zur Deckung zu bringen. Mit einer „Verbesserung“ der gerechneten Resultate in dieser Richtung wäre jedoch der Glaubwürdigkeit des Modells kaum gedient.

In dem Experiment von Schwenn wurde außer der bisher besprochenen Elektrodenkonfiguration noch eine weitere untersucht, die sich vom „Normalbogen“ darin unterschied, daß die Anode ringförmig mit dem Innenradius $r_A = 1,25$ cm und dem Außenradius $R_A = 3,4$ cm war. Dieser Bogen wurde von Schwenn als „Hohlbogen“ bezeichnet, denn es zeigte sich, daß Stromdichte- und Temperaturverteilung „hohl“ waren, d.h. Maxima außerhalb der

Achse hatten. Die Maximaltemperatur betrug 50000 K; die Elektronendichte wurde nicht gemessen. Wie beim Normalbogen war der Bogenstrom 1,8 kA, die axiale Magnetfeldstärke 10 kG. Für das Modell wurden wieder eine Temperatur von 40000 K und eine Elektronendichte von $1,0 \cdot 10^{16}$ cm⁻³ angenommen.

Bei dieser Elektrodenkonfiguration läßt sich das im vorigen Abschnitt beschriebene „Verdopplungsverfahren“ natürlich nicht anwenden; man muß vielmehr die Stromdichteverteilungen auf den Elektroden durch Probieren herausfinden. Einen Ausgangspunkt lieferte die Vermutung, daß der Strom auf der Kathode bevorzugt am Außenrand, auf der Anode bevorzugt am Innenrand ansetzen würde, um trotz $R_K < r_A$ „möglichst parallel“ von einer Elektrode zur anderen zu gelangen, und daß so die gemessene ringförmige Stromdichteverteilung im Bogen selbst zustande käme. Diese Vermutung bestätigte sich, wie Abb. 8 zeigt, die den berechneten Stromdichte- und Potentialverlauf auf den Elektroden wiedergibt. Die Elektrodenpotentiale sind hier auf $\pm 10\%$ konstant, wenn man die Schwankungen auf die Differenz der mittleren Potentiale von 295 V bezieht. Die im Experiment gemessene Brennspannung betrug 145 V. Besonders soll darauf hingewiesen werden, daß es erforderlich war, in den Innenzonen der Kathode und in den Außenzonen der Anode kleine negative Stromdichten vorzugeben, um etwa konstante Elektrodenpotentiale zu erzielen. Auf der Anode sind sie freilich so klein, daß sie in der Abb. 8a kaum zu erkennen sind. Demnach gibt es kleine Sekundärströme die von den äußeren zu den inneren Bereichen der Elektroden fließen und ihre Ursache wieder in einer lokalen Überkompensation der radialen elektrischen Feldstärke durch $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ haben. Abbildung 9 zeigt den Vergleich zwischen den von Schwenn gemessenen radialen Profilen der Stromdichte, des Potentials, der axialen und der radialen elektrischen Feldstärke mit den Ergebnissen der Modellrechnung, wieder für eine Ebene, die 7,8 cm von der Kathode, 5,7 cm von der Anode entfernt liegt. Bei diesem Experiment war die Kathode geerdet; von der berechneten Potentialkurve (Abb. 9b) wurde deshalb das berechnete mittlere Kathodenpotential von -260 V (vgl. Abb. 8b) subtrahiert. In Abb. 9d fallen die theoretischen Kurven für $-E_r$ und $v_\phi B$ praktisch zusammen. Die Werte für die Rotationsgeschwindigkeit selbst sind am rechten Rand angegeben. In

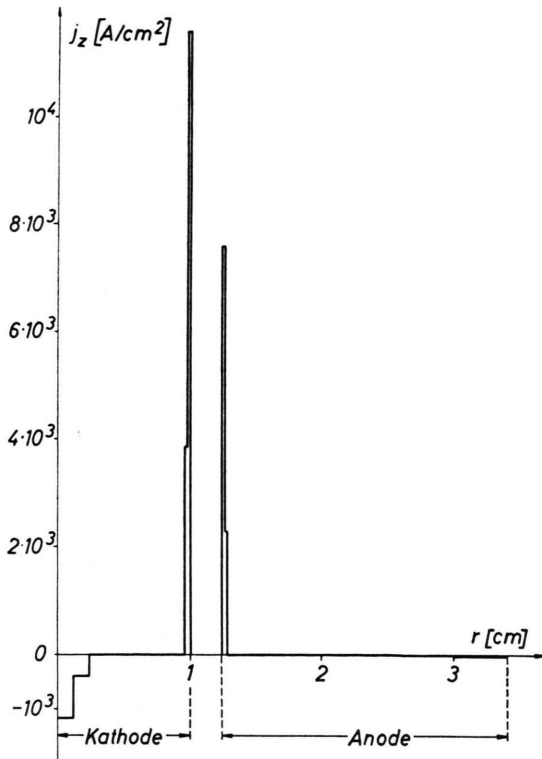


Abb. 8a. Vorgegebene Stromdichteverteilung auf den Elektroden für den sog. „Hohlbogen“.

den gerechneten j_z - und E_z -Profilen treten in der Achsenumgebung negative Werte auf, die wieder als Folge einer lokalen Überkompensation von E_r zu deuten sind. Die Rechnungen ergeben nämlich in der Tat für die Achsenumgebung $v_\phi B > |E_r|$, was jedoch in Abb. 9d nicht zu erkennen ist, weil beide Kurven im Rahmen der Zeichengenauigkeit zusammenfallen. Daß im Experiment in der Achsenumgebung keine negativen j_z und E_z gefunden wurden, kann verschiedene Ursachen haben. Es ist z. B. aus den Messungen bekannt, daß die Temperatur ebenfalls zur Achse hin abnimmt, ferner weiß man, daß das Plasma axial durch die Anodenöffnung abströmt, was auch das Dichteprofil beeinflussen muß. Somit ist das Plasma gerade hier stark inhomogen und deshalb kann sich das Zusammenwirken von radialer elektrischer Feldstärke und Rotationsbewegung völlig anders gestalten.

Abb. 10 zeigt als Funktion von z die maximale Rotationsgeschwindigkeit für die jeweilige Ebene $z = \text{const.}$ Danach ist der Maximalwert bis fast zu den Elektroden hin praktisch konstant. Der Dreh-

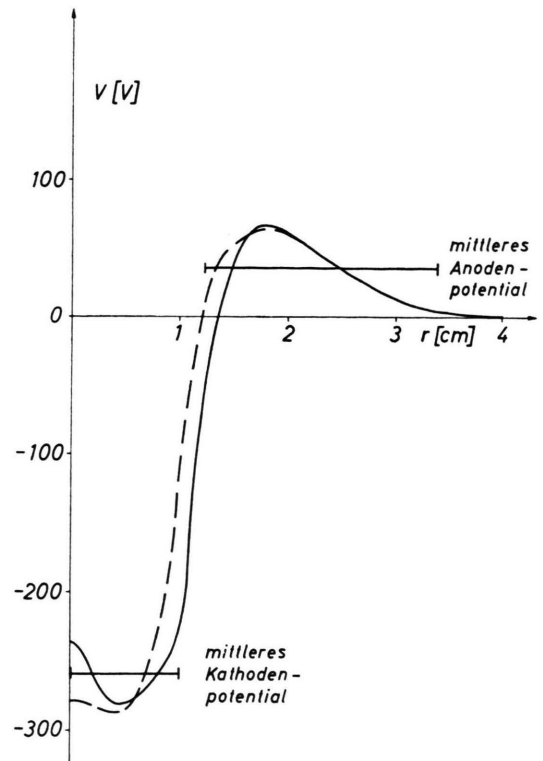


Abb. 8b. Berechneter Potentialverlauf in den Elektroden-ebenen für den sog. „Hohlbogen“. Die gemessene Brenns spannung betrug 145 V.

sinn ist so, daß die Rotation von einer zur Achse hin gerichteten radialen Stromdichte ($j_r < 0$) angetrieben wird. Dieses Verhalten von v_ϕ wurde von DÖBELE⁸ an einem vom „Hohlbogen“ in der Geometrie nur unwesentlich abweichenden Bogen gefunden. Die Rotationsgeschwindigkeit wurde dort durch die Doppler-Verschiebung schmaler Verunreinigungslinien gemessen und betrug $2,8 \cdot 10^6 \text{ cm sec}^{-1}$ bei $B = 16 \text{ kG}$. Am „Normalbogen“ war die Doppler-Verschiebung der Verunreinigungslinien kleiner als die Linienbreite, d.h. die Rotationsgeschwindigkeit muß hier erheblich kleiner sein. Das ist in Übereinstimmung mit den Resultaten der Modellrechnung, wie Abb. 10 zeigt, in die auch für den „Normalbogen“ die maximale Rotationsgeschwindigkeit als Funktion von z aufgetragen ist. Wie man sieht, ist auch der Gang mit z ein völlig anderer, d.h. Betrag und axialer Verlauf der Rotationsgeschwindigkeit sind sehr stark durch die Elektrodengeometrie bedingt.

Insgesamt kann man die Übereinstimmung zwischen Experiment und Modell als überraschend gut

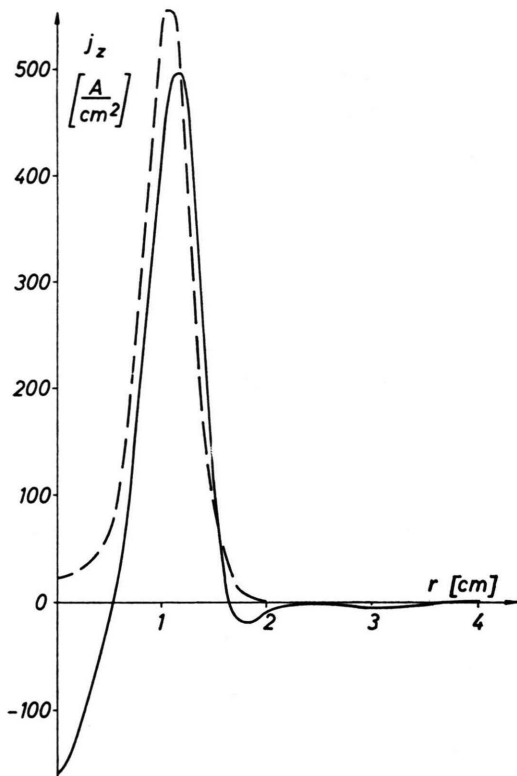


Abb. 9 a.

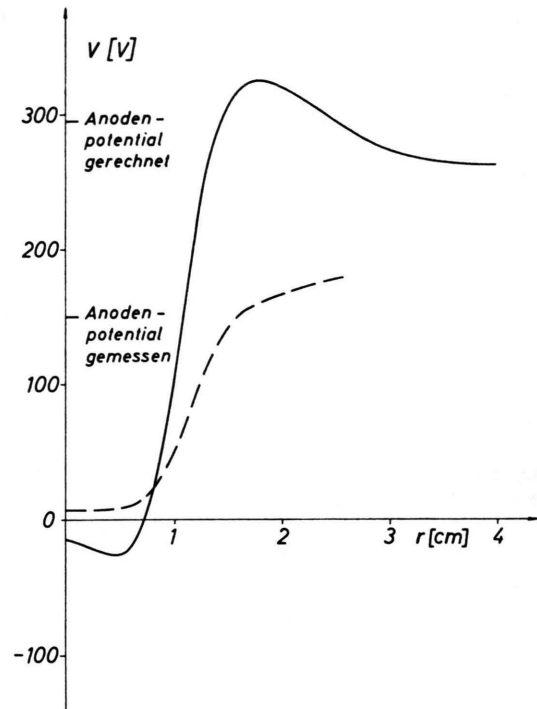


Abb. 9 b.

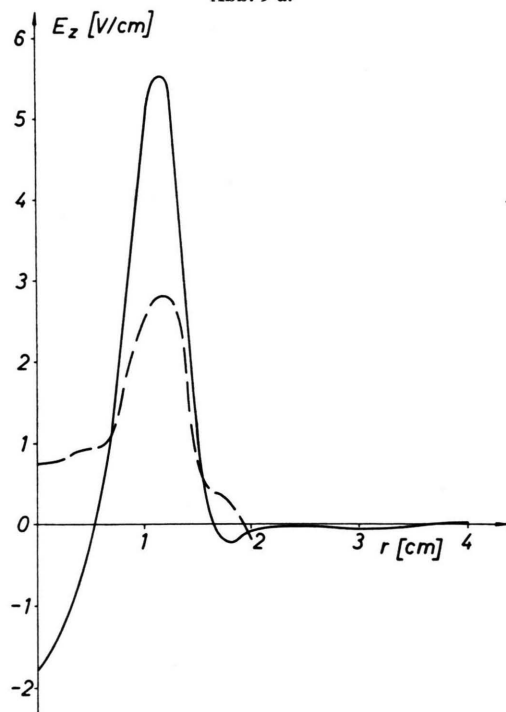


Abb. 9 c.

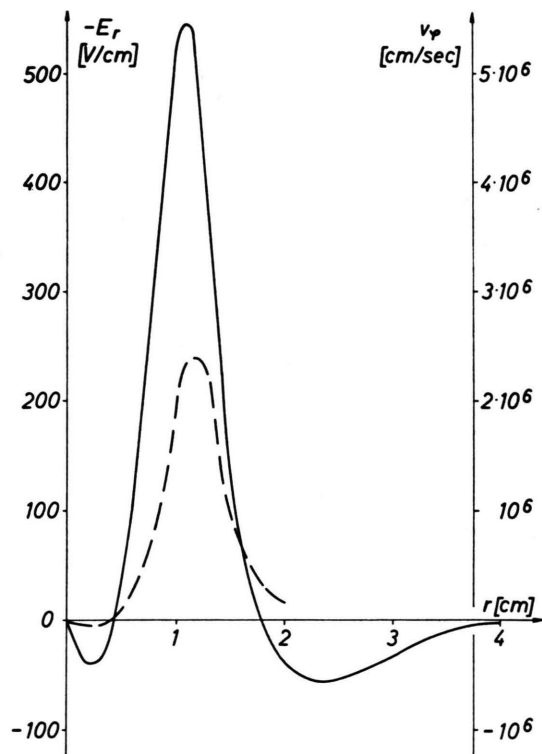


Abb. 9 d.

Abb. 9a—d. Vergleich der Meßergebnisse von SCHWENN⁵⁻⁷ am „Hohlbogen“ (gestrichelt) mit den Resultaten der Modellrechnung (ausgezogen), beides für eine Ebene, die etwa in der Mitte zwischen den Elektroden liegt. — 9a) Stromdichte, 9b) Potential, 9c) axiale und 9d) radiale elektrische Feldstärke. In 9b) hat die Kathode das Potential 0; die Anodenpotentiale sind angegeben. In 9d) fallen die gerechneten Kurven für $-E_r$ und $v_\varphi B$ im Rahmen der Zeichengenauigkeit zusammen. Die Skala am rechten Rand gibt v_φ an.

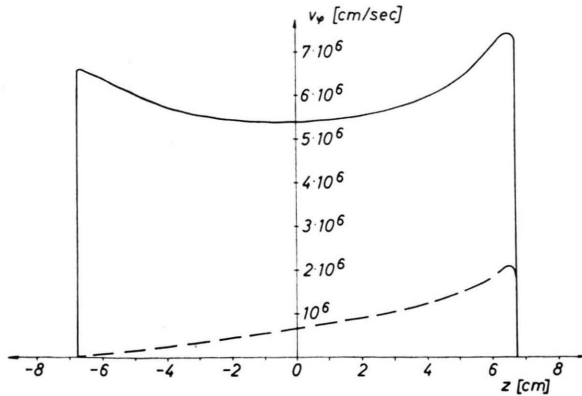


Abb. 10. Maximale ($\partial v_\phi / \partial r = 0$) Rotationsgeschwindigkeit für den „Normalbogen“ (gestrichelt) und für den „Hohlbogen“ (ausgezogen).

bezeichnen, vor allem, wenn man sich vor Augen hält, welche Konsequenzen die Inhomogenität des realen Plasmas haben kann:

1. Die räumliche Verteilung des Potentials und der Rotationsgeschwindigkeit, und damit die der Stromdichte können stark modifiziert werden. So tritt z. B. anstelle der Terme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\sigma}{\sigma'} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

in Gl. (I.5) der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial \sigma'}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\sigma}{\sigma'} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z}$$

Analoges gilt natürlich auch für die Navier-Stokes-Gleichung.

2. In einem inhomogenen Plasma rufen die Druck- und Temperaturgradienten und die mit ihnen verknüpften Diffusionsströme, elektrischen Ströme und Massenströme zusätzliche elektromotorische Kräfte hervor, die teils zum Stromtransport beitragen, teils durch Raumladungsfelder kompensiert werden. Im allgemeinen werden dadurch Stromdichte- und Potentialverteilung beide beeinflusst. So führt z. B. die ambipolare Diffusion in einem starken Magnetfeld ($\omega_e^2 \tau_e^2 \gg 1$) dazu, daß sich das Plasma negativ gegen das umgebende Neutralgas auflädt.
3. Umgekehrt haben die Plasmarotation und die azimuthalen Hall-Ströme eine Rückwirkung auf den Druckaufbau des Plasmas. Die Hall-Ströme wirken druckerhöhend für $j_r < 0$, druckmindernd für $j_r > 0$. Die Zentrifugalkraft wirkt überall

druckmindernd; das wird wesentlich, wenn v_ϕ in die Größenordnung der Ionenschallgeschwindigkeit kommt.

Darüber hinaus kann die Zentrifugalkraft sich auch auf die Begrenzung des Bogenstromes auswirken. Begrenzung liegt vor für $v_\phi = -E_r/B_z$; der Maximalwert von $|E_r|$ kann durch $z_0 E_z/R_E$ abgeschätzt werden, wo R_E wieder der Elektrodenradius sein soll. Somit gilt größenordnungsmäßig

$$|v_\phi| = (z_0/R_E) (E_z/B_z),$$

d. h., $|v_\phi|$ nimmt bei sonst gleichen Verhältnissen mit dem Elektrodenabstand und mit $1/B_z$ zu.

Für inhomogenes Plasma lautet die r -Komponente des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes

$$\frac{1}{\sigma} j_r = E_r + v_\phi B_z - \frac{1}{e n_e} \left(j_\phi B_z - j_z B_\phi - \frac{\partial p_e}{\partial r} \right),$$

wo p_e der Partialdruck der Elektronen ist. Zur Vereinfachung wurden die Terme in $\partial T / \partial r$ sowie die EMK $-v_z B_\phi$ vernachlässigt. Für $\omega_e^2 \tau_e^2 \gg 1$ ist der Hall-Anteil von $j_\phi B_z / e n_e$ groß gegen j_r / σ , weshalb $j_r / \sigma = 0$ gesetzt werden darf. Die r -Komponente der Bewegungsgleichung lautet bei Berücksichtigung der Zentrifugalkraft

$$\frac{\partial p}{\partial r} - \rho \frac{v_\phi^2}{r} = \frac{\partial p_e}{\partial r} + \frac{\partial p_i}{\partial r} - \rho \frac{v_\phi^2}{r} = j_\phi B_z - j_z B_\phi.$$

Die innere Reibung ist hier vernachlässigt; das ist insofern gerechtfertigt, als v_ϕ in der r -Komponente der Navier-Stokes-Gleichung nicht auftritt.

Kombination beider Gleichungen liefert nun

$$E_r + v_\phi B_z - \frac{1}{e n_e} \left(\frac{\partial p_i}{\partial r} - \rho \frac{v_\phi^2}{r} \right) = 0,$$

oder, mit $n_e = Z n_i$, $\rho = m_i n_i$

$$E_r + v_\phi B_z + \frac{m_i}{Z e} \frac{v_\phi^2}{r} - \frac{1}{e n_e} \frac{\partial p_i}{\partial r} = 0.$$

Der letzte Term ist von der Größenordnung $\partial(kT/e)/\partial r$ und deshalb vernachlässigbar. Setzt man zur Abschätzung $v_\phi = \Omega R_E$, so erhält man

$$\Omega^2 + \omega_i \Omega + \frac{Z e}{m_i} \frac{E_r}{R_E} = 0,$$

worin unter E_r wieder der Maximalwert zu verstehen ist. Die Zentrifugalkraft ist demnach für die Strombegrenzung vernachlässigbar, wenn $|\Omega| \ll \omega_i$ ist. Obige Gleichung hat die Lösungen

$$\Omega = -\frac{\omega_i}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_i^2}{4} - \frac{Z e}{m_i} \frac{E_r}{R_E}}. \quad (31)$$

Wählt man hier das $+$ -Zeichen, so kommt man für $|\Omega| \ll \omega_i$ wieder auf $\Omega R_E = -E_r/B_z$. Im allgemeinen Fall sind die Lösungen aber nur reell, wenn

$$\omega_i^2 > 4 (Ze/m_i) (E_r/R_E)$$

gilt, was für $E_r > 0$ nicht unbedingt erfüllt sein muß. Die Berücksichtigung der Zentrifugalkraft stellt also eine Minimalforderung an das axiale Magnetfeld; sie kann auf

$$\omega_i R_E > 4 (z_0/R_E) (E_z/B_z)$$

umgeschrieben werden. Für die Daten des „Normalbogens“, nämlich $z_0 E_z = 30$ V, $R_E = 1$ cm ergibt sich z.B. $B_z^{\min} = 1,1$ kG. Wegen $B_z = 10$ kG ist die Zentrifugalkraft hier vernachlässigbar.

Für $B_z \approx B_z^{\min}$ ist nach Gl. (31) $\Omega \approx -\omega_i/2$, d.h. Strombegrenzung durch rotierendes Plasma ist nicht mehr möglich, wenn die Kreisfrequenz der Rotation die halbe Ionengyrofrequenz übertrifft. In diesem Zusammenhang soll auf ein weiteres Bogenexperiment hingewiesen werden, nämlich auf die sog. „Eieruhr“. Über die Untersuchungen zur Stromdichteverteilung in diesem Bogen wurde früher⁹ berichtet. Seitdem wurde der Versuch gemacht, die effektive Bogenlänge von 60 cm auf 3 m zu vergrößern. Setzt man entsprechend den bisherigen Daten⁹ $R_E = 0,3$ cm als effektiven Elektrodenradius und $E_z = 10$ V/cm für die axiale elektrische Feldstärke an, so ergibt sich für doppelt ionisiertes Heliumplasma $B_z^{\min} = 50$ kG. Das tatsächlich angelegte Magnetfeld betrug aber maximal nur 40 kG. In der Tat konnte keine Begrenzung des Bogenstromes auf die durch die Elektrodenquerschnitte gegebene Flußröhre erzielt werden. Eine Modifikation der obigen Zahlenwerte könnte zu einer Reduktion von B_z^{\min} führen. Es ist aber auch noch zu bedenken, daß für $B_z \approx B_z^{\min}$ $|\Omega| \approx \omega_i/2$ gelten müßte. Für 40 kG ist $\omega_i = 2 \cdot 10^8$ sec⁻¹ (Helium, $Z = 2$), d.h. es müßte $\Omega R_E = 3 \cdot 10^7$ cm sec⁻¹ sein, ein Wert, der weit oberhalb der zu erwartenden Ionenschallgeschwindigkeit liegt. Der negative Ausfall dieses Experiments ist somit entweder wegen $B_z < B_z^{\min}$ oder wegen dynamischer Effekte auf die Zentrifugalkraft zurückzuführen.

5. Zusammenfassung

Treten in einem Lichtbogen mit überlagertem axialem Magnetfeld radiale Stromdichtekomponenten auf, so rotiert das Plasma und es fließen azimu-

tale Hall-Ströme; beides liefert elektromotorische Kräfte, die dem radialen Stromfluß entgegenwirken, d.h. die radiale Ausdehnung des Lichtbogenstromes begrenzen. Die Begrenzung durch den Hall-Effekt ist um so wirksamer, je größer der sog. Hall-Parameter $\omega_e \tau_e$, das Produkt zwischen Gyrofrequenz und reziproker Stoßfrequenz der Elektronen, ist. Die Begrenzung durch die Plasmарotation ist um so wirksamer, je kleiner die Viskosität des Plasmas ist; diese nimmt mit $\omega_i \tau_i$, dem Produkt zwischen Gyrofrequenz und Stoßfrequenz der Ionen ab.

Für einen zwischen Punktelektroden in einem homogenen Plasma und in einem homogenen Magnetfeld brennenden Lichtbogen lassen sich die für die stationäre Stromdichteverteilung relevanten Gleichungen $-\text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } \mathbf{j} = 0$, das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz und die Navier-Stokes-Gleichung — simultan exakt lösen. Dabei treten folgende Parameter auf: der halbe Elektrodenabstand z_0 , der Hall-Parameter $\omega_e \tau_e$ und eine charakteristische Länge a . a^2 ist dabei proportional zur Viskosität des Plasmas und hängt außerdem noch explizit vom Magnetfeld und von Dichte und Temperatur des Plasmas ab.

Aus den Lösungen lassen sich folgende Skalengesetze herleiten: Ist

$$\beta = \frac{z'_0}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_e^2 \tau_e^2}} \frac{z_0}{a}$$

höchstens von der Größenordnung 1, so ist die radiale Ausdehnung des Bogenstromes $z'_0 = z_0/\sqrt{1 + \omega_e^2 \tau_e^2}$, d.h. für $\omega_e^2 \tau_e^2 \gg 1$ proportional zu z_0/B . In diesem Fall sind Rotation und Hall-Strom von vergleichbarer Bedeutung für die Begrenzung der radialen Ausdehnung des Bogenstromes. Ist dagegen $\beta \gg 1$, so ist die Plasmарotation der dominierende Effekt; die radiale Ausdehnung ist dann durch $\sqrt{z'_0 a} \ll z'_0$ gegeben; für $\omega_i^2 \tau_i^2 \gg 1$ ist sie proportional zu $\sqrt{z_0/B}$.

Diese Skalengesetze lassen sich durch einfache Überlegungen auch auf Lichtbögen mit ausgedehnten Elektroden übertragen. Es wird ein Näherungsverfahren angegeben, mit dem sich die Stromdichteverteilung auch für diesen Fall bestimmen läßt. Das wird dann dazu benutzt, um Modellrechnungen mit experimentellen Resultaten zu vergleichen. Dieser Vergleich führt zu befriedigender Übereinstimmung.

Schließlich wurde gezeigt, daß das hier entwickelte Modell anwendbar ist, sofern die Kreisfrequenz Ω der Rotationsbewegung dem Betrag nach klein

gegen die Gyrofrequenz ω_i der Ionen ist. Andernfalls muß die Zentrifugalkraft berücksichtigt werden. In diesem Fall ist eine Begrenzung der radialen Ausdehnung des Bogenstromes nur möglich, solange $|\Omega| < \omega_i/2$ ist.

Herrn H. GORENFLO danke ich für die Programmierung und sorgfältige Durchführung der numerischen Auswertung der Lösungen. Diese Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiet der Plasmaphysik durchgeführt.

¹ O. KLÜBER, Z. Naturforsch. **25a**, 1583 [1970].

² J. RAEDER u. S. WIRTZ, Z. Naturforsch. **24a**, 1433 [1969].

³ In Gl. (I,17) steht irrtümlicherweise der Faktor $1/4$ anstelle von 4.

⁴ Vgl. z. B. A. SOMMERPELD, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. VI, Akad. Verlagsges. Leipzig 1947.

⁵ R. SCHWENN, Institut für Plasmaphysik, Bericht Nr. 3/103 [1969].

⁶ R. SCHWENN, Z. Naturforsch. **25a**, 1310 [1970].

⁷ R. SCHWENN, Z. Naturforsch. **25a**, 1601 [1970].

⁸ H. F. DÖBELE, Z. Naturforsch. **24a**, 1249 [1969].

⁹ O. KLÜBER, Z. Naturforsch. **24a**, 1473 [1969].

ortho-Effects in Mass Spectra.

Alteration of the Molecular-Ion Energy Distribution in Disubstituted Acetanilides

STEVEN A. BENEZRA and MAURICE M. BURSEY

Venable and Kenan Chemical Laboratories, The University of North Carolina
Chapel Hill, North Carolina 27 514

(Z. Naturforsch. **27 a**, 670—677 [1972]; received 25 November 1971)

Simplified quasi-equilibrium calculations performed on the mass spectra of dihalosubstituted phenyl acetates and acetanilides again uncover the same substituent effects on the rise of k with E for the loss of ketene from phenyl acetates as was determined for the monosubstituted phenyl acetates. However, a new effect is found for the disubstituted acetanilides, removal of excitation probability for low-lying energy states of the molecular ion. This effect parallels the removal of transition probability for the lowest excited state of the neutral molecule.

We have been interested in determining the utility of simplified quasi-equilibrium theory in understanding changes wrought by substituents throughout series of aromatic compounds. We have used one of the approximations of WILLIAMS¹ and have argued that, because we deal with a series of very similar compounds, the errors we make in carrying the approximations required in this approach should be almost equally pertinent to each compound studied. Thus, in comparing numerical results for all the members of a closely related set of compounds, trends of substituent effects within a series may be detected and interpreted.

Recently we studied a series of phenyl acetates and acetanilides², substituted at the *ortho* or *para* position with fluorine, chlorine, bromine, or iodine, in order to determine the effect on the pre-exponential term A in Equation (1)³

$$k(E) = A[(E - E_0)/E]^n \quad (1)$$

when the substituent is varied. Equation (1) is applicable in the strict sense only to assemblages of harmonic oscillators; however, empirical studies of the effect of the tightness of the activated complex on the value of A required to fit the Equation to spectra where rearrangements occur show that it has utility as a tool for studying activated complexes⁴. In Eq. (1), E is the internal energy of the ion, E_0 is the threshold energy for the process for which k is studied, and n is an effective number of oscillators determined by the best fit.

We argued in this study that the same probability distribution of energies for the molecular ions of each compound studied could be used because of the similarity of structure for the compounds; as an indication of the relative uniformity of the electronic structure of the neutral compounds, we pointed to the very great similarity of their ultraviolet spectra. This might be taken as a likely indication, though not a proof, that the lower states of the molecular ion corresponding to removal of n or π electrons could be of similar energy and accessibility, since

Reprint requests to Prof. Dr. M. M. BURSEY, Department of Chemistry, The University of North Carolina, Chapel Hill, North Carolina 27 514. USA.